Oberlin College Library,
JUL 23 1920

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1917. 18. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 14 am 15. Juli 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:
E. Budde, Bemerkungen zu zwei Arbeiten von E. Waetzmann. S. 285.
H. Lorenz, Die Abhängigkeit d. Luft- und Wasserwiderstandes von der Geschwindigkeit. (Nachtrag.) S. 290.
L. Schames, Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs. S. 291.
H. Seemann, Biprismen für Röntgenstrahlenhärtemesser. S. 291.
P. Debye u. P. Scherrer, Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. III. S. 291.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
R. Glocker, Die Meßmethoden der Röntgenstrahlen. S. 302.
Besprechungen:
D. Reichinstein, Die Eigenschaften des Adsorptionsvolumens. S. 315.
A. Gutzmer, Die Tätigkeit des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathemat. Unterrichtskommission 1908—1916. S. 316.
F. Kohlrausch u. L. Holborn, Das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der wässerigen Lösungen. S. 316.
Personalien. S. 316.
Angebote. S. 316.
Gesuche. S. 316.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zu zwei Arbeiten von E. Waetzmann.

Von E. Budde.

I. Ein kritischer Satz von Waetzmann.

Wir betrachten erzwungene Schwingungen eines Punktes μ von einem Freiheitsgrad, dessen Koordinate x sei. Derselbe möge von vornherein aufgefaßt werden als Repräsentant eines resonierenden Objektes, dessen Bewegungen ev. als Gehörswahrnehmungen empfunden werden. Treten an μ zwei stationäre Schwingungen von gleicher Amplitude A zusammen, deren Kreisfrequenzen m und n sind, so lautet seine Schwingungsgleichung (die Phasenkonstanten sind als unerheblich fortgelassen)

$$x = A\,(\sin mt + \sin nt). \tag{1}$$

Diese läßt sich in bekannter Weise sofort umformen in

$$x = 2A\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t. \tag{2}$$

Sind die Amplituden der beiden zu kombinierenden Töne ungleich, so lautet die Schwingungsgleichung

$$x = A\sin mt + B\sin nt. \tag{3}$$

Diese läßt sich zunächst umformen in

$$\begin{aligned} x = {} & (A+B)\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t \\ & +(A-B)\sin\frac{m-n}{2}t\cdot\cos\frac{m+n}{2}t, \end{aligned} \tag{4}$$

und hieraus ergibt sich weiter, indem man Sinus und Kosinus desselben Arguments zusammenfaßt,

$$\begin{aligned} x = {} & \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(m-n)t} \\ & \cdot\sin\left[\frac{m+n}{2}t+\operatorname{arctg}\left(\frac{A-B}{A+B}\operatorname{tang}\frac{m-n}{2}t\right)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

oder auch

$$\begin{aligned} x = {} & \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos(m+n)t} \\ & \cdot\sin\left[\frac{m-n}{2}t+\operatorname{arctg}\left(\frac{A+B}{A-B}\operatorname{tang}\frac{m+n}{2}t\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

H. Starke[1]) hat die Gleichung (2) gedeutet als Darstellung einer Schwingung von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ mit der variabeln Amplitude

$$2A\cos\frac{m-n}{2}t.$$

Ich selbst[2]) habe die gleiche Zerlegung benutzt und außerdem auch die Gleichung (5) als Ausdruck einer Schwingung von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ und der variablen Amplitude

$$\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(m-n)t}$$

aufgefaßt. Waetzmann[3]) hat gegen diese Deutung der Formeln Einspruch erhoben. Ich halte diesen Einspruch für nicht berechtigt, und da er recht tiefgehende Fragen berührt, so erlaube ich mir, die Begründung meiner abweichenden Ansicht hier darzulegen.

Wie aus den Gleichungen (1) bis (6) ohne weiteres hervorgeht, wird dabei die übliche Vereinfachung beibehalten, welche darin besteht, daß das einzelne schwingungsfähige Organ im Ohr durch einen Punkt μ von einem Freiheitsgrad ersetzt wird. Ferner wollen wir hier nur den Fall betrachten, daß die beiden zu kombinierenden Töne gleiche Amplitude haben. Dann ziehen sich die Gleichungen (5) und (6) auf (2) zurück, und man kann $A = 1$ setzen, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Es sind also zunächst die beiden Gleichungen

$$x = \sin mt + \sin nt, \tag{7}$$

$$x = 2\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t \tag{8}$$

zu betrachten. Aus Gleichung (8) leitet man in bekannter Weise die Schwebungen ab, indem

$$2\cos\frac{m-n}{2}t$$

1) H. Starke, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 285, 1908.
2) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 121, 1911.
3) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **12**, 235, 1911.

als veränderliche Amplitude des Tones von der Schwingungszahl $\frac{m+n}{4\pi}$ aufgefaßt wird. Wesentlich ist dabei, daß man der Amplitude, weil der Kosinus nach je $\frac{2\pi}{m-n}$ Sekunden sein Vorzeichen wechselt, streng genommen abwechselnd positive und negative Werte (Phasenwechsel) zuschreiben muß. Die Intensität dagegen ist dem Quadrat des Kosinus proportional, und da

$$4\cos^2\frac{m-n}{2}t = 2 + 2\cos(m-n)t\,,$$

so folgt, daß die Periode der Intensitätsschwankung halb so groß ist wie diejenige der Amplitude. Man hört $\frac{m-n}{2\pi}$ Schwebungen in der Sekunde.

Herr Waetzmann hält diesen Schluß für bestechend, solange $m-n$ sehr klein ist, aber für irreführend. Zur Begründung seiner Kritik sagt er:

„Das Auftreten einer Sinusfunktion in dem Ausdruck für die Resultierende kann nur dann als das Vorhandensein eines Tones, dessen Schwingungszahl gleich der Periodenzahl des Sinus ist, gedeutet werden, wenn der Sinus als Summand, nicht aber wenn er als Faktor eines Produktes auftritt, dessen anderer Faktor nicht konstant ist, sondern selbst mit der Zeit variiert. Der Definition des Tones als Sinusschwingung liegt mathematisch zugrunde das Fouriersche Theorem, physikalisch die Resonanz und entsprechend physiologisch die Resonanztheorie des Hörens, die eine Konsequenz oder richtiger Voraussetzung des Ohmschen Gesetzes ist. Nur weil es mathematisch möglich ist, eine komplizierte Schwingung als Summe von Sinusschwingungen darzustellen, und weil ferner diese einzelnen Summanden durch Resonatoren tatsächlich verstärkt und auch ohne Resonatoren gehört werden, ist unsere Tondefinition berechtigt. Es hätte also keinen Sinn, die Empfindung eines einfachen Tones auf das Vorhandensein einer Sinusschwingung im Außenraum zurückführen zu wollen, wenn das Ohr keinen Resonanzapparat enthielte. *Entsprechend hat es physikalisch keinen Sinn, einen Schwingungsvorgang, der in einem der Resonatoren im Ohr vor sich geht, nochmals in Sinusschwingungen zerlegen zu wollen, da ja kein Apparat vorhanden ist, der diese Zerlegung besorgen könnte.*"

Daraus schließt Waetzmann:

„daß das Auftreten eines Sinus als Faktor eines Produktes, dessen anderer Faktor auch eine Funktion der Zeit ist, das Vorhandensein eines Tones von der betreffenden Schwingungszahl weder physikalisch noch physiologisch verständlich zu machen vermag".

Betrachten wir zunächst den (von mir) im Druck hervorgehobenen Satz; dabei braucht die Unschärfe der Resonanz im Ohr noch nicht berücksichtigt zu werden. Mir scheint, daß er auf den zur Erörterung stehenden Fall nicht anwendbar ist; denn wenn man Gleichung (8) als Schwebungsgleichung auffaßt, so mutet man dem Ohr nicht zu, die tönende Schwingung noch einmal zu zerlegen, sondern nur, ihre wechselnde Intensität zu empfinden, und das noch mit der Beschränkung, daß der Wechsel nicht zu schnell vor sich gehe, so daß das Gehirn Zeit hat, dem An- und Abschwellen des Tones zu folgen. Dafür, daß Schwebungen deutlich vernommen werden, wird ja vorausgesetzt, daß $m-n$ klein sei. Es besteht kein Zweifel darüber, daß ein gegebener Resonator zu verschiedenen Zeiten mit verschiedener Intensität schwingen kann, und daß diese Intensitätsverschiedenheit wahrgenommen werden kann, ohne daß dabei noch eine besondere Zerlegung erforderlich ist; demgemäß wird auch kein besonderer zerlegender Apparat erforderlich. Es zweifelt niemand daran, daß eine Gleichung wie

$$x = e^{-bt}\sin mt$$

eine gedämpfte Schwingung von der Kreisfrequenz m richtig wiedergibt. e^{-bt} wird dabei einfach als mit der Zeit abnehmende Amplitude aufgefaßt. Ebenso denkbar und tatsächlich ebenso herstellbar wie ein Ton, dessen Amplitude sich asymptotisch der Null nähert, ist aber auch ein Ton mit periodisch veränderlicher Amplitude, und der läßt sich, wenn φ eine periodische Funktion der Zeit ist, offenbar darstellen und nur darstellen durch eine Gleichung von der Form

$$x = \varphi(t)\sin mt\,.$$

Dabei kann φ ebensowohl ein Kosinus wie irgendeine andere periodische Funktion von t sein. Was aber für Töne im allgemeinen gilt, gilt sicherlich auch im Falle der Gleichung (8). Ich halte also die Starkesche Deutung für durchaus berechtigt. Nur der Vorbehalt ist zu wiederholen, daß das Ohr, um nach Gleichung (8) zu perzipieren, Zeit haben muß, die veränderliche Intensität als solche mehr oder weniger bequem zu erfassen. Das ist, wie bekannt, in eminenter Weise der Fall, wenn $m-n$ sehr klein ist; ist $m-n$ nicht sehr klein, aber klein oder mäßig, so merkt das Ohr noch die Intensitätsschwankungen, ohne ihren Verlauf im einzelnen verfolgen zu können, die Schwebungen werden zu „Stößen", schließlich zum Schwirren, und über eine gewisse Grenze hinaus versagt

in bekannter Weise die Fähigkeit der Stoßwahrnehmung. Ist dieser obere Grenzfall eingetreten, so ist die Gleichung (8) immer noch richtig, aber die durch sie dargestellte Tonkombination ist als Variationston aufzufassen, und die namentlich von F. A. Schulze entwickelte Theorie dieser Töne tritt in Kraft. Danach ist der Ausdruck

$$2\cos\frac{m-n}{2}t\cdot\sin\frac{m+n}{2}t$$

in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln, und es liegt auf der Hand, daß diese Entwicklung nichts anderes liefert als die Gleichung

$$x=\sin mt+\sin nt;$$

das heißt, man hört die getrennten Töne m und n.

Die leichten Modifikationen dieser Betrachtung, welche sich ergeben, wenn man an Primärtöne denkt, die in verschiedenen Regionen der Tonleiter liegen, bedürfen wohl keines näheren Eingehens.

Ähnlich wie die Resonatoren im Ohr verhalten sich die Resonatoren außerhalb des Ohres, z. B. die von Waetzmann besonders hervorgehobenen Stimmgabeln; nur unterscheiden sich diese erstens dadurch, daß sie schwach gedämpft sind, und zweitens dadurch, daß sie ihrer größeren Masse wegen, und weil sie keine besondere resonanzverstärkende Zuleitung haben, weniger leicht ansprechen[1]). Man denke sich z. B. eine Stimmgabel, die auf 200 Schwingungen in der Sekunde abgestimmt ist, und der gleichzeitig zwei Töne von 200,25 und 199,75 Schwingungen zugeführt werden. Die Schwebung dauert dann zwei Sekunden, die mathematische Periode der Amplitude aber vier Sekunden. Während der ersten zwei Sekunden erhält die Stimmgabel Anstöße von der Anzahl 200, die erst an Stärke zunehmen, dann abnehmen, innerhalb deren aber kein Phasenunterschied vorhanden ist. Unter der Voraussetzung also, daß die Stimmgabel empfindlich genug ist, um innerhalb zwei Sekunden zum merklichen Mittönen zu kommen, wird sie diesen Anstößen folgen und wird mitschwingen. Dann aber folgt eine weitere Reihe von Anstößen, die die entgegengesetzte Phase haben wie vorhin. Diese Anstöße werden also die Stimmgabel erst zur Ruhe bringen und dann eine neue Resonanzschwingung an ihr einleiten, und so werden die verschiedenen Resonanzbewegungen der Stimmgabel periodisch aufeinander folgen, und zwar mit der Periode der Schwebungen, aber mit abwechselnder Phase — immer vorausgesetzt, daß die Stimmgabel empfindlich genug sei, die Erregung genügend anzunehmen und dabei dem Phasenwechsel der Amplitude zu folgen. Nun denke man sich denselben Hergang wiederholt, aber mit einer größeren Schwebungszahl, etwa 20 in der Sekunde; dann wird die Stimmgabel bei ihrer geringen Reizbarkeit den Schwankungen des zugeleiteten Tones nicht mehr so weit folgen, daß sie in deutliche Schwingungen gerät, und es ist nicht zu verwundern, daß ihr Mittönen sehr bald ein Ende nimmt, wenn man die Differenz $m-n$ vergrößert. Das hier Gesagte ist aber nur die etwas ins Breite gezogene Erklärung, welche H. Starke l. c. dafür gegeben hat, daß der Ton von der Kreisfrequenz $\frac{m+n}{2}$ sich vielfach durch Resonatoren nicht nachweisen läßt. Die Nachweisbarkeit kann nur verlangt werden, wenn der Resonator so empfindlich ist, daß die Tonschwingungen, welche in einer einzelnen Schwebung enthalten sind, ausreichen, um erstens eine bereits vorhandene Schwingung des Resonators von entgegengesetzter Phase auszulöschen, und dann noch zweitens eine neue Schwingung einzuleiten.

Es ist vielleicht bemerkenswert, daß das Auge sich, wenn es Schwebungskurven analysiert, der Gleichung (8) anschließt; ist $m-n$ klein, so faßt es, wie wohl jedermann aus der Ansicht zahlreicher Kurven weiß, die Resultierende von m und n als Schwingung von variabler Intensität auf. Vgl. hierzu die unten folgende Figur. (Den Vorzeichenwechsel der Amplitude beachtet es in der Regel nicht.) Wird $m-n$ größer, so folgt es der Kurve noch mit mäßiger Leichtigkeit, wenn n ein aliquoter Teil von m ist, schon etwas schwieriger, wenn das Verhältnis $\frac{m}{n}$ sich durch kleine Zahlen ausdrücken läßt; darüber hinaus wird ihm das Bild unübersichtlich.

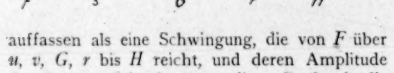
Auf einen Punkt ist noch hinzuweisen. In Gleichung (8) faßt man in der Regel $\frac{m+n}{2}$ als die Kreisfrequenz des gehörten Tones und

$$2\cos\frac{m-n}{2}t$$

als die veränderliche Amplitude desselben auf. Rein mathematisch wäre es offenbar ebenso berechtigt, die Gleichung aufzufassen als Darstellung eines Tones von der Kreisfrequenz $\frac{m-n}{2}$ und der variabeln Amplitude $2\sin\frac{m+n}{2}t$. Das Auge kann dieser Auffassung in der Tat folgen, wenngleich die Zumutung, das zu tun, auf den ersten Blick etwas paradox wirken mag.

1) Schon Helmholtz, „Tonempfindungen", 4. Aufl., Braunschweig 1877, S. 276 hat Erwägungen dieser Art kurz aber deutlich ausgesprochen.

Es faßt die nachstehende Figur gewöhnlich auf als Schwingung, deren eine Periode etwa durch die Strecke usv dargestellt wird, und deren Amplitude von F bis u zunimmt, von v bis G wieder abnimmt usw. Man kann sie aber auch



auffassen als eine Schwingung, die von F über u, v, G, r bis H reicht, und deren Amplitude den kurzen Schwebungen, die z. B. durch die Strecke usv angedeutet sind, unterliegt. Das Ohr aber kann dieser Auffassung nicht folgen, einfach weil auf jeder Strecke von der Art der usv zwei Phasenwechsel liegen; die verschiedenen Phasen folgen also so schnell aufeinander, daß die einzelne nicht imstande ist, die resonierende Faser bis zur Empfindlichkeitsschwelle zu reizen. (Schließt man sich der Hypothese an, die ich in den Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vom Jahre 1916 behandelt habe[1]), so entspricht dem, daß die Schwingungszahl $\frac{m-n}{4\pi}$ für das Erregungsmaximum der Basilarmembran nicht in Betracht kommt.) Im Vorstehenden liegt auch schon der Beweis dafür, daß für den Fall $B \neq A$ die Gleichung (6) überhaupt nicht in Betracht kommt, sondern nur Gleichung (5). Nach alledem halte ich die von Starke l. c. gegebenen Deutungen für richtig.

Die große Bedeutung des Ohmschen Prinzips soll gewiß nicht in Abrede gestellt werden, aber den oben zitierten Sätzen von Waetzmann möchte ich die beiden folgenden Bemerkungen gegenüberstellen:

Erstens: Es lassen sich Fälle nachweisen, in welchen die Fouriersche Reihe für sich allein nicht ausreicht, um die Erfahrungstatsachen darzustellen. Das trifft schon für den einfachen Fall der Gleichung (7) zu, wenn die beiden in Betracht kommenden Töne m und n voneinander um erheblich weniger als einen halben Ton abweichen. Für diesen Fall gibt Waetzmann[2]) selbst als Erfahrungsresultat im Anschluß an Stumpf an: „Man hört nur einen zwischen ihnen liegenden Ton, und diesen schwebend.“ Für das Auftreten dieses zwischenliegenden Tones gibt Gleichung (7) für sich allein durchaus keinen Anhalt; man muß, um es zu erklären, die Unschärfe der Resonanz im Ohr zur Hilfe nehmen; vgl. hierzu meine zitierte Abhandlung vom Jahre 1916.

Zweitens: neben dem Ohmschen Prinzip kommt für jeden, der sich auf die Grundlage der Helmholtzschen Theorie stellt, das Prinzip der spezifischen Sinnesenergien in Betracht, und zwar mit gleicher Berechtigung wie jenes. Aus diesem folgt aber: Das Ohmsche Prinzip kann nur bestimmen, welche resonierenden Elemente im Ohr durch einen objektiv gegebenen Ton m in Bewegung geraten. Es liefert aber keine Vorschrift darüber, welcher Art diese Bewegung sein muß, um den Hörnerv zu reizen. Schwingt irgendeine Faser der Basilarmembran mit ihren Anhängen, so reizt sie die zugehörigen Nervenfibrillen und liefert dadurch einen Tonreiz bzw. einen Beitrag zu einem solchen; dieser Reiz erzeugt eine Tonempfindung, deren Höhe vom Sensorium nach der Lage der gereizten Region beurteilt wird. Dabei kommt es auf die Bewegungsform der resonierenden Elemente nicht näher an; irgendeine bewegte Basilarfaser wird die zugehörigen Nervenfibrillen reizen, einerlei ob sie mit konstanter oder veränderlicher Epoche schwingt. Welcher von diesen Zuständen gegebenenfalls eintritt, das bestimmt a priori nicht die Fouriersche Reihe, sondern die eigene Bewegungsgleichung der betreffenden Faser mit ihrem Zubehör.

Ich möchte hieraus den Schluß ziehen, daß die Bedeutung der Fourierschen Reihe für die Tonwahrnehmung noch einer Grenzfestsetzung bedarf, die aber hier nicht versucht werden soll.

1) E. Budde, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 369, 1916.
2) E. Waetzmann, Die Resonanztheorie des Hörens. Braunschweig, 1912, S. 96.

II. Über die Bewegungsgleichung der Telephonmembran im Mikrophon-Telephonkreis.

Die schöne Untersuchung, welche Waetzmann unter dem Titel: „Die Entstehungsweise von Kombinationstönen im Mikrophon-Telephonkreis“[1]) veröffentlicht hat, stellt der Theorie die Aufgabe, Bewegungsgleichungen zu ermitteln, welche die beobachteten Erscheinungen umfassen. Dabei soll wieder die Vereinfachung beibehalten werden, welche die Schwingung der Telephonplatte durch diejenige eines Punktes von einem Freiheitsgrad ersetzt. Das wird um so eher erlaubt sein, da das von Waetzmann benutzte Spiegelungsverfahren tatsächlich immer nur die Schwingungen wiedergibt, welche eine bestimmte Stelle der Membran unter verschiedenen Bedingungen ausführt.

Von besonderer Wichtigkeit ist dabei ein Versuchsergebnis, welches Waetzmann l. c. Seite 732 angibt: Die Telephonmembran wurde durch einen konstanten Strom einseitig durchgebogen und dann, ohne Einschaltung des Mikrophons durch zwei Primärtöne erregt. Dabei waren keine merklichen Kombinationstöne

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **42**, 729, 1913.

zu beobachten; sie waren, wenn vorhanden, jedenfalls so schwach, daß Waetzmann erklärt, er könne auf Grund seines Beobachtungsmaterials ihre Existenz nicht mit Sicherheit behaupten. Daraus folgt, daß man der Telephonmembran, welche bei seinen Versuchen diente, innerhalb der benutzten Amplituden eine lineare Schwingungsgleichung zuzuschreiben hat. Wir haben also den Fall vor uns, daß ein Objekt mit linearer Schwingungsgleichung unter gewissen Umständen Kombinationstöne liefert, während wir gewöhnt sind, für die Entstehung von Kombinationstönen stets nichtlineare Glieder der Schwingungsgleichung in Anspruch zu nehmen. Das Interesse der Untersuchung liegt gerade in der Aufgabe, die Umstände, welche diese Abweichung vom Gewöhnlichen begründen, mathematisch annähernd zu formulieren. Das ist nur in sehr roher Annäherung möglich, weil die Eigenschaften des bei den Versuchen benutzten Mikrophons nicht mit genügender Konstanz quantitativ reproduzierbar und sehr ungenau bekannt sind; aber man kann wenigstens zu einer ungefähren theoretischen Darstellung des Waetzmannschen Falles gelangen.

Den Weg zur Ermittlung derselben hat Waetzmann deutlich gewiesen. Für die Einzelheiten muß ich auf die Originalabhandlung verweisen; hier ist nur folgendes auszugsweise hervorzuheben:

Bei den von Waetzmann abgebildeten Kurven handelt es sich um Schwingungen, deren Verhältnisse $\frac{m}{n}$ zwischen den Grenzen 6/5 und 30/29 liegen. Die benutzten Tonpaare mußten also deutliche Schwebungen liefern, die ja auch in den Kurven bequem zu erkennen sind. Nun hat Waetzmann konstatiert, daß der mittlere Ruhewiderstand des Mikrophons nicht konstant ist, sondern von der Intensität der durchgehenden Schwingungen abhängt. Das frisch geschüttelte Mikrophon zeigt einen großen Ruhewiderstand von über 100 Ω; wird es durch einen kräftigen Ton erregt, so nimmt derselbe allmählich bis auf etwa 25 Ω ab. Fällt jetzt ein neuer Ton auf, so wird dieser Widerstand vergrößert, und wenn die Schwingungen schwächer werden, nimmt er wieder ab. Die mittlere Lage der Telephonmembran, über welche sich die Schwingungen lagern, ist nicht identisch mit der Ruhelage im stromlosen Zustand, sondern weicht nach der einen oder anderen Seite von ihr ab. Werden dem Mikrophon gleichzeitig zwei Töne m und n zugeleitet, deren Kreisfrequenzen nicht allzuweit voneinander verschieden sind, so werden diese Töne, da sie deutlich miteinander schweben, abwechselnd eine Verstärkungs- und eine Schwächungszeit haben. Während der Verstärkungszeit ist der mittlere Widerstand relativ groß, während der Schwächungszeit ist er relativ klein. Der durchgehende Strom wird während der Verstärkungszeit die Telephonplatte weniger durchbiegen als während der Schwächungszeit.

Überträgt man dieses auf einen Punkt von einem Freiheitsgrad, so heißt es: Würde der Punkt von keinen äußeren Kräften angegriffen, so wäre seine Gleichgewichtslage $x = 0$. Wird aber der Punkt gleichzeitig der Einwirkung zweier schwebender stationärer Töne m und n ausgesetzt, so ist die Mittellage, von der seine Schwingungen ausgehen, nicht mehr $x = 0$, sondern $x = \psi$, wo ψ eine Funktion der resultierenden Intensität ist, die sich aus dem Zusammenwirken von m und n ergibt. Die rücktreibende Kraft, welche seine Schwingung beschleunigt, ist also nicht mehr $q^2 x$, wie es ohne Stromdurchgang der Fall sein würde, sondern $q^2(x - \psi)$. Dabei bleibt aber seine Schwingungsgleichung, wenn man diese Kraft einsetzt, linear, d. h. sie hat die Gestalt

$$x'' + 2bx' + q^2(x - \psi) = A \sin mt + B \sin nt , \qquad (1)$$

weil, wie oben schon gesagt wurde, der Versuch ergeben hat, daß die Gleichung der Telephonplatte innerhalb aller benutzten Amplituden linear ist. Es handelt sich nun darum, das ψ in dieser Gleichung zu bestimmen. Wir wissen, daß ψ von der Intensität der jeweiligen Schwingungen abhängt; die Art der Abhängigkeit ist nicht genau bekannt. Wir wissen nur, es existiert eine gewisse mittlere Durchbiegung a, und während der Verstärkungszeit ist der Widerstand größer, also der Strom und damit die Durchbiegung schwächer, während der Schwächungszeit ist das Gegenteil der Fall. Nennt man also die Intensität der Schwingungen J, so wird es erlaubt sein, in erster Annäherung die Abweichung vom Mittel proportional mit J zu setzen, d. h. wenn ζ eine Zahl ist, so wird sein

$$\psi = a - \zeta J . \qquad (2)$$

Das J in dieser Gleichung ist diejenige Intensität, welche direkt aus dem Zusammentreffen der beiden Töne m und n hervorgeht. Es berechnet sich also wenigstens annähernd aus der folgenden Gleichung, in welcher die abhängige Variable mit y bezeichnet ist,

$$y'' + 2by' + q^2 y = A \sin mt + B \sin nt .$$

Dabei werden die Konstanten A und B nicht ganz dieselben Werte haben, die sie in der Gleichung (1) besitzen, weil ein Teil der aufgewandten Energie für die Nebeneffekte verloren geht. Das hat aber für das Folgende keine

wesentliche Bedeutung. Aus Gleichung (3) ergibt sich in bekannter Weise, wenn E_1, E_2, h und k vier neue Konstanten sind, für die erzwungene Schwingung in y

$$y = E_1 \sin{(mt+h)}\,t + E_2 \sin{(nt+k)}\,t\,.$$

Sollen Verdeckungserscheinungen vermieden werden, so müssen A und B so gewählt sein, daß E_1 und E_2 nicht weit voneinander abweichen. Wird $E_2 = E_1$, so kann man die Gleichung (2), anderenfalls die Gleichung (5) der ersten (vorstehenden) Abhandlung unbedenklich anwenden; man erhält also, wenn die Amplitude in y mit P bezeichnet wird

$$P = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1\,E_2 \cos{[(m-n)\,t + h - k]}}$$

und damit

$$J = E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1\,E_2 \cos{[(m-n)\,t + h - k]}\,. \qquad (3)$$

Setzt man dies in Gleichung (2) und damit ψ in Gleichung (1) ein, so findet sich

$$x'' + 2\,b\,x' + q^2(x + \text{const}) = A \sin{mt} + B \sin{nt} - 2\,q^2\,\zeta\,E_1\,E_2 \cos{[(m-n)\,t + h - k]}\,. \qquad (4)$$

Da jetzt auf der linken Seite lauter lineare Glieder stehen, folgt sofort, daß man außer den gedämpften Eigenschwingungen der Telephonplatte und den beiden Tönen m und n den Differenzton $m-n$ hört. Damit ist also obenhin dargetan, daß die Telephonplatte unter den Waetzmannschen Bedingungen auch dann einen Kombinationston liefert, wenn sie an sich innerhalb der benutzten Tonstärken eine lineare Schwingungsgleichung hat. Gleichung (2) ist wahrscheinlich zu stark vereinfacht, aber wenn an Stelle von ζJ eine verwickeltere Form mit höheren Potenzen von J tritt, so wird das offenbar nur die Folge haben, daß außer dem Differenzton auch Kombinationstöne anderer Ordnung auftreten können. Der Versuch, die Intensität des Kombinationstones aus Gleichung (4) zu berechnen, würde keinen Sinn haben, solange kein Beobachtungsmaterial vorliegt, aus dem sich der Wert von ζ bzw. die genauere Beziehung zwischen ψ und J ermitteln läßt. Weitere Experimente der hier besprochenen Art unter Bedingungen, welche diese Ermittlung vorzunehmen gestatten, wären offenbar sehr erwünscht.

(Eingegangen 1. Juni 1917.)

Die Abhängigkeit des Luft- und Wasserwiderstandes von der Geschwindigkeit. (Nachtrag.)

Von H. Lorenz.

In meiner gleichnamigen Abhandlung (diese Zeitschr. 1917 Nr. 10) habe ich gezeigt, daß der Quotient des von der Verdrängung und der Wellenbildung herrührenden Widerstandanteils W_1 und des Quadrats v^2 der Geschwindigkeit für

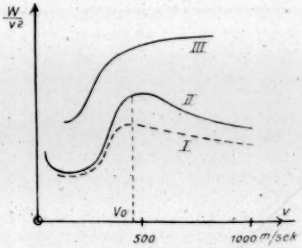
$$v_0^2 = \frac{2\,a^4}{2\,a^2 - c^2} > a^2$$

ein Maximum

$$\left(\frac{W_1}{v^2}\right)_0 = kF\left(1 + \frac{A\,v_0^4}{v_0^4 - a^2}\right) = kF\left(1 + \frac{Ac^2}{4\,a^4}(4a^2 - c^2)\right) \qquad (12b)$$

besitzt, wonach sich die Kurve der Asymptote $kF(1+A)$ nähert. Hierin ist sowohl der Dämpfungsfaktor c^2 als auch die nach (7b) und (9c) überdies durch die Geschoßform bedingte Konstante A dem Quadrat λ^2 der Wellenlänge der vom bewegten Körper erregten Schwingung proportional. Mit wachsender Wellenlänge rückt daher das Maximum (12b) immer weiter hinaus, bis es für $c^2 = 2\,a^2$ und $v_0^2 = \infty$ in die wegen der gleichzeitigen Zunahme von A schon sehr hoch liegende Asymptote fällt.

Diesem Bewegungszustand nähert sich offenbar das zylindrische Geschoß, bei dem sich die Vergrößerung der Wellenlänge gegenüber dem Spitzgeschoß durch die schon weit davor beginnende und dahinter endigende Auslenkung des widerstehenden Mittels zwanglos erklärt. Dieses theoretische Ergebnis wird vollauf bestätigt durch die von Becker und Cranz (a. a. O.) versuchsmäßig aufgenommene Widerstandskurve des Zylindergeschosses, die unter III



mit derjenigen eines gewöhnlichen Infanteriespitzgeschosses von gleichem Kaliber (II) sowie einer Granate (I) nach einer Zusammenstellung von v. Eberhard (Artill. Monatshefte 1912) in nebenstehender Figur vereinigt sind.

Daraus geht hervor, daß unser Widerstandsgesetz auch diesen Sonderfall umfaßt, der Cranz in der erwähnten Abhandlung zu der verfrühten Schlußfolgerung eines mit der Geschoßform wechselnden Widerstandsgesetzes unter gleichzeitiger Aufgabe des Formfaktors veranlaßte.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.

(Eingegangen 10. Juni 1917.)

Zur Thermodynamik des Drosselvorgangs.

Bemerkung zur Erwiderung von R. Plank[1]).

Von Léon Schames.

Nach brieflicher Aussprache ergab sich, daß mit dem Buchstaben Q Plank die von außen zu- oder abgeführte Wärmemenge bezeichnete, während ich selbst damit die Joule-Kelvin-Wärme, d. h. die im Innern des Systems durch den Drosselvorgang erzeugte oder gebundene Wärmemenge ausdrückte. Unter diesen Umständen besteht zwischen den Gleichungen in Planks Erwiderung und den meinen kein Widerspruch, und wird die Definition der „integralen Inversionskurve"

$$\int_0^p \left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] dp = 0$$

mit derjenigen der „endlichen Inversionskurve" $A = 0$ identisch.

1) R. Plank, diese Zeitschr. **18**, 33, 1917.

(Eingegangen 7. Juni 1917.)

Biprismen für Röntgenstrahlenhärtemesser.

Erwiderung auf die Bemerkung von J. Koenigsberger in Heft 2 dieses Jahrgangs.

Von H. Seemann.

J. Koenigsberger weist in seiner Bemerkung auf Seite 34 d. Jahrg. darauf hin, daß die Doppelplatten von Helmholtz, Autenrieth und Koenigsberger, ferner die Biprismen von König und Martens nicht von mir stammen. Ich mache Herrn Koenigsberger darauf aufmerksam, daß ich in meiner fraglichen Arbeit (diese Zeitschr. **17**, 622, 1916) lediglich die Kombination bekannter Biprismen mit ebenso bekannten Röntgenstrahlenhärtemessern als neu beschrieben habe.

Gegenüber dem von Herrn K. erwähnten Gebrauchsmuster der Firma Hellige wahre ich meine Priorität auf Grund eines $^3/_4$ Jahr älteren Patentes, das inhaltlich mit meiner genannten Veröffentlichung genau übereinstimmt[1]).

1) Es war während der Veröffentlichung der Bemerkung des Herrn K. schon bekannt gegeben und ist mir inzwischen am 22. Mai 1917 erteilt worden unter Zurückweisung von Einsprüchen der genannten Firma und Prof. J. Koenigsbergers.

Würzburg, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 9. Juni 1917.)

Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. III.

Von P. Debye und P. Scherrer.

Mit Tafeln VIII und IX.

Über die Konstitution von Graphit und amorpher Kohle.

Vor ungefähr Jahresfrist haben wir an dieser Stelle[1]) über Versuche berichtet, welche, angeregt durch theoretische Überlegungen über das Atom[2]) zu einer Ultramikroskopie des Molekülinnern führten. Die experimentellen Methoden sind jetzt soweit entwickelt, daß ein messendes Eindringen in das Atom selbst durchaus möglich erscheint. Die zurzeit herrschenden äußeren Umstände haben die experimentelle Bearbeitung des letztgenannten Punktes bis jetzt verhindert, dagegen ist eine weitere, die Atomanordnung im Molekül betreffende Frage endgültig erledigt worden. Es wurde nämlich das Raumgefüge der verschiedenen Kohlenstoffmodifikationen[3]) festgestellt. Dabei gingen wir aus von der nun vollends bestätigten Erwartung, daß den erstrebten Aufschlüssen über die Art der Selbstbindung desjenigen Elements, welches in der organischen Chemie die Hauptrolle spielt, ein weitreichendes Anwendungsfeld offen stehen würde.

§ 1. Methode.

Über unsere diesbezüglichen Versuche soll im folgenden berichtet werden, und zwar wollen wir zunächst nochmals kurz auf das Charakteristische an unserer Methode aufmerksam machen.

Zur Untersuchung von Kristallen mit Hilfe von Röntgenstrahlen sind bis jetzt drei verschiedene Verfahren experimentell verwandt worden. Zunächst die von M. v. Laue[4]) vorgeschlagene Untersuchungsform. Bei dieser werden mehrere wohlausgebildete orientierte Kristallplatten benötigt, die einzeln untersucht werden. Der Kristall wird, mittels Goniometers genau justiert, in den Gang eines dünnen Bündels von „weißem" Röntgenlicht (Bremsstrahlung) gebracht und erzeugt auf der dahinter in kurzem Abstand aufgestellten photographischen Platte das gewünschte Interferenzbild. Die gewöhnlich ungeheuer zahlreichen Interferenzpunkte (bis 1000 auf einer Aufnahme) des Laue-Diagramms zeigen meist auf den ersten Blick die Symmetrie-

1) Diese Zeitschr. **17**, 277, 1916.

2) P. Debye, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss., Göttingen 27. Febr. 1915.

3) Das Raumgitter des Diamants ist aus den Untersuchungen v. W. H. u. W. L. Bragg bekannt; Proc. Roy. Soc. **89**, 278, 1913.

4) W. Friedrich, P. Knipping und M. v. Laue, Sitzungsber. München 1912, S. 303.

verhältnisse und die Zonenverbände des Kristalls[1]), hingegen stößt die zahlenmäßige Auswertung der Diagramme in den meisten Fällen auf große Schwierigkeiten. Wenn das Kristallsystem der untersuchten Substanz nicht bekannt ist, läßt sich das Raumgitter wohl kaum feststellen.

Beim Verfahren von W. H. und W. L. Bragg[2]) wird monochromatisches Röntgenlicht benutzt[3]). Auch hier müssen an dem zu untersuchenden Kristall tadellos orientierte und ausgebildete Flächen vorhanden sein oder angebracht werden. Die Grundlage des Braggschen Verfahrens bildet die folgende Tatsache: Fällt ein Röntgenstrahl von der Wellenlänge λ mit dem Glanzwinkel φ auf eine Kristallfläche, die zugleich eine Netzebene ist, so wird dieser Strahl dann und nur dann von dieser Fläche reflektiert, wenn die Bedingung

$$n\lambda = 2d \sin \varphi \qquad (1)$$

erfüllt ist. Hierin bedeutet d den Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Atomebenen und n ist eine kleine ganze Zahl, die die Ordnung des Spektrums angibt. Wenn nach (1) überhaupt Reflexion eintritt, so genügen einfallender

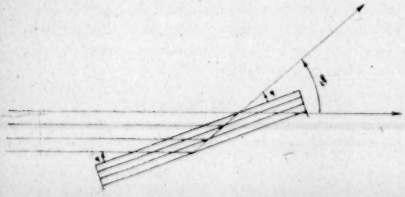


Fig. 1.

und reflektierter Strahl den bei gewöhnlicher optischer Reflexion gültigen Gesetzen. Durch Messung der Glanzwinkel φ oder des Winkels ϑ, den der reflektierte Strahl mit dem primären bildet, erlangt man Kenntnis der Abstände der Netzebenen und damit auf einigem Umwege des Raumgitters. Auch beim Braggschen Verfahren ist es unbedingt nötig, das Kristallsystem, dem der zu untersuchende Kristall angehört, zu kennen. Man wäre ja sonst gar nicht in der Lage, den Kristall so zu orientieren, daß eine gewünschte Netzebene zur Reflexion kommen würde.

Sobald von einer Substanz keine größeren Kristalle vorhanden sind, versagen diese beiden angegebenen Verfahren. Die von den Verfassern angegebene Methode hat den Vorzug, keiner ausgebildeten Kristalle zu bedürfen. Es genügt, wenn die Substanz in Form eines sehr feinen völlig amorph aussehenden Pulvers vorliegt, das aus mikroskopischen oder submikroskopischen Kriställchen besteht. Es ist auch ganz unnötig von vornherein etwas über das Kristallsystem der Substanz zu wissen. Dieses wird, wie in § 2 gezeigt wird, aus der Aufnahme selbst erschlossen. Man erhält also von einer völlig unbekannten Substanz einmal das System und dann die innere Atomanordnung, beide auf Grund einer einzigen Aufnahme[1]). In einem solchen mikrokristallinen Pulver kommen die Kriställchen und damit die Netzebenen in allen möglichen Orientierungen vor. Wenn man ein solches Pulver also mit einem dünnen Bündel monochromatischen Röntgenlichts durchstrahlt, so wird es stets Kriställchen geben, die so orientiert sind, daß für eine bestimmte Netzebenenschar derselben die oben angegebene Reflexionsbedingung (1) erfüllt ist. Bei anderen Kriställchen sind es wiederum andere Netzebenenscharen, die gerade reflektieren; oder dieselbe Schar ist so gelagert, daß sie in zweiter Ordnung reflektiert, usf. Jedenfalls erhält man unter bestimmten Winkeln ϑ, den verschiedenen im Kristall vorkommenden Netzebenenabständen d entsprechend, reflektierte Strahlung. Diese zu einem bestimmten Winkel ϑ gehörigen Strahlen bilden, wegen der völligen Symmetrie der Erscheinung in bezug auf den Primärstrahl, den Mantel eines geraden Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2ϑ.

Um die auftretenden Interferenzen alle mit einem Schlage zu bekommen, benutzen wir für unsere Aufnahmen eine zylinderförmige Kamera, in deren Achse das Kristallpulver in Form eines gepreßten Stäbchens aufgestellt wird (siehe Fig. 2). Längs der ganzen Innenwand der Kamera befindet sich der zylindrisch gebogene Film, in den die auf Kegeln um den Primärstrahl auftretenden „reflektierten" Strahlen die charakteristischen Kurven (4. Grades) einschneiden. Nach der Aufnahme wird der Film aufgerollt und die Winkel ϑ werden ausgemessen.

Wenn man nun zu immer kleineren und kleineren Kristallen übergeht, so werden die Interferenzen immer unschärfer und breiter, ohne indessen ihre Lage zu ändern. Genau so wie in der Optik die von einem Gitter

1) Siehe die ausführlichen Artikel von F. Rinne im neuen Jahrbuch für Mineralogie u. Geologie 1916 sowie eine Reihe von Arbeiten von H. Haga u. F. M. Jaeger in den Abhandl. d. Amsterdamer Akademie 1913—14, ferner A. Johnsen, Anordnung der Atome in Kristallen, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik **14**, 52, 1917.

2) Die Arbeiten der Herren Bragg sind zusammengefaßt in dem Buch W. H. u. W. L. Bragg, X-Rays and crystal structure, London 1915.

3) Röntgenröhren passender Konstruktion lassen sich so betreiben, daß sie überwiegend monochromatisches Licht liefern.

1) Natürlich gestaltet sich die Verwertung der Aufnahme viel einfacher, wenn das Kristallsystem schon bekannt ist.

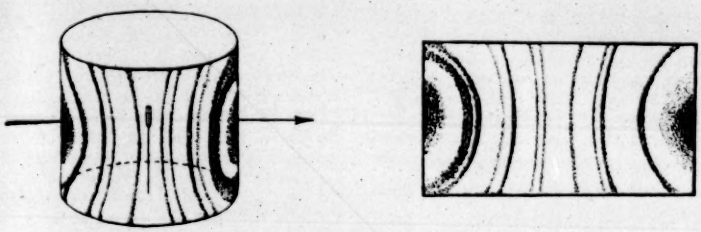


Fig. 2[1]).

gelieferten Spektrallinien immer breiter werden, je weniger Striche das Gitter (bei gleicher Gitterkonstante) umfaßt. Bei Kriställchen, deren Ausdehnung nach jeder Richtung etwa 10^{-4} cm beträgt, kommt die Breite der Interferenzstreifen im Vergleich zum Öffnungswinkel des Primärstrahles nicht in Betracht. Bei Kristallen dieser Größenordnung hat man praktisch völlig scharfe Linien zu erwarten. Kristalle, die größer als 10^{-2} cm sind, beginnen bereits sich durch Punkte auf den Interferenzlinien störend bemerkbar zu machen. Die Substanz muß dann feiner pulverisiert werden.

Geht man zu immer kleineren und kleineren Kriställchen über, so kommt man schließlich zu regelmäßigen Anordnungen von ganz wenigen Atomen. Der Begriff des Raumgitters verflüchtigt sich allmählich und macht dem des Moleküls Platz. Bei solchen Anordnungen versagt die Braggsche Erklärung für das Entstehen von Interferenzen, denn man kann ja nicht mehr von Netzebenen sprechen. Man könnte auf den ersten Blick erwarten, daß die Interferenzen von wenig atomigen Molekülen, die selbst ganz regellos durcheinander gelagert sind, sich völlig verwischen und nur eine allgemeine Schwärzung des Films hervorbringen würden. Dies ist aber nicht so. Die genaue Rechnung und die Erfahrung[2]) zeigen vielmehr folgendes Resultat: Wenn irgendeine gesetzmäßige Anordnung von Atomen im Molekül vorhanden ist, bleibt dieselbe bei der Durchstrahlung mit monochromatischem Röntgenlicht auch dann noch erkennbar, wenn sehr viele solcher Moleküle in regelloser Orientierung miteinander gemischt vorkommen. Man kann natürlich noch einen Schritt weiter gehen und fragen, ob sich nicht eine regelmäßige Anordnung von Elektronen im Atom ebenfalls erkennen ließe. Man kann diese Frage theoretisch, und wie uns jetzt scheint auch praktisch, nur bejahend beantworten[1]). Eine schon lange bekannte Erscheinung, die unseres Erachtens die Richtigkeit der letztgenannten Überlegung deutlich vor Augen führt, ist die folgende[2]):

Ermittelt man die Gesamtzerstreuung verschiedener Elemente als Funktion des Atomgewichts, dann findet man bei verhältnismäßig langen Wellen die Menge zerstreuter Strahlung pro Atom proportional dem Quadrat des Atomgewichts[3]). Bei kürzeren Wellenlängen nimmt die Zerstreuung ab und nähert sich bei kurzen Wellen der Proportionalität mit dem Atomgewicht selbst[4]). Der Massenzerstreuungskoeffizient $\frac{s}{\varrho}$ ist also im ersten Falle proportional dem Atomgewicht, im zweiten Falle eine Konstante, nämlich (nach Barklas Messungen für kleine Atomgewichte) gleich 0,2. Die eben erwähnte Theorie gibt von dieser Tatsache Rechenschaft. Man findet nämlich für die Gesamtzerstreuung pro Atom im Falle von (im Vergleich mit den Atomdimensionen) sehr langen bzw. sehr kurzen Wellen die Werte

$$\frac{8\pi}{3}\frac{\varepsilon^4}{\mu^2 c^4}\cdot Z^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{8\pi}{3}\frac{\varepsilon^4}{\mu c^4}\cdot Z,$$

wobei Z den Stellenzeiger im periodischen System bedeutet. Da nun Z ungefähr gleich dem halben Atomgewicht ist, sind die obigen qualitativen Angaben erfüllt. Die Werte sind aber auch quantitativ richtig, für kurze Wellen berechnet sich aus dem oben an zweiter Stelle angegebenen Ausdruck $\frac{s}{\varrho}$ in der Tat zu 0,20.

§ 2. Berechnung der Interferenzaufnahmen.

Für reguläre Kristalle ist die Berechnung

1) Wir entnehmen diese Figur dem Artikel von F. Rinne, Beiträge z. Kenntnis des Feinbaus d. Kristalle, N. Jahrbuch f. Mineralogie, Geol. u. Paleontol. **2**, 85, 1916.

2) P. Debye u. P. Scherrer, Ber. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Sitzg. 17. Dez. 1915.

1) P. Debye, Ber. d. Kgl. Ges. d. W. Göttingen 27. Febr. 1915.

2) Vergleiche den Artikel von Alex. Müller über Zerstreuung von Röntgen- und γ-Strahlen im Kleiner-Heft der Physikal. Ges. Zürich.

3) C. G. Barkla, Phil. Mag. **7**, 543, 1904; **21**, 648, 1911.

4) Barkla u. C. A. Sadler, Phil. Mag. **17**, 739, 1909.

völlig mühelos und in den zitierten Arbeiten ausführlich angegeben[1]). Für Kristalle, die nicht dem regulären System angehören, hat man der Berechnung folgenden Satz zugrunde zu legen: Sind h_1 h_2 h_3 ganze Zahlen (die kristallographischen Indizes der „reflektierenden Ebene") und ist ϑ der Winkel, unter dem eine Reflexion auftritt, dann ist bei beliebigem Kristallsystem $4\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ stets eine homogene quadratische Funktion der drei eben genannten ganzen Zahlen:

$$\left.\begin{aligned} 4\sin^2\frac{\vartheta}{2} = {} & k_{11}h_1^2 + k_{22}h_2^2 + k_{33}h_3^2 \\ & + 2k_{23}h_2h_3 + 2k_{31}h_3h_1 + 2k_{12}h_1h_2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die in beliebiger Menge vorhandenen Interferenzstreifen auf unserem Film müssen sich also auf alle Fälle mittels (2) unter Heranziehung von sechs allgemeinen Koeffizienten $k_{11}\ldots k_{12}$ ihrer Lage nach darstellen lassen. Diese sechs Koeffizienten charakterisieren das Kristallsystem vollkommen, und zwar gelten die folgenden Beziehungen: Es seien abc die drei Vektoren, welche den Kanten des Elementarparallelepipeds der Lage und Größe nach gleich sind, außerdem sei λ die benutzte Wellenlänge. Die Rechenvorschrift, welche die Koeffizienten der quadratischen Form mit den das Elementarparallelepiped bestimmenden Stücken verbindet, lautet dann so:

Man setze abkürzend

$$\left.\begin{aligned} K = {} & k_{11}k_{22}k_{33} - k_{11}k_{23}^2 - k_{22}k_{31}^2 \\ & - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{23}k_{31}k_{12}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

dann ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{22}k_{33} - k_{23}^2}{K}, & \frac{bc}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) &= \frac{k_{21}k_{31} - k_{23}k_{11}}{K}, \\ \frac{b^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{33}k_{11} - k_{31}^2}{K}, & \frac{ca}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{c},\mathfrak{a}) &= \frac{k_{32}k_{12} - k_{31}k_{22}}{K}, \\ \frac{c^2}{\lambda^2} &= \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{K}, & \frac{ab}{\lambda^2}\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= \frac{k_{13}k_{23} - k_{12}k_{33}}{K}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sobald es also gelungen ist, die auf dem Film gemessenen Linien durch eine quadratische Form genau darzustellen, ist das Elementarparallelepiped bekannt. Die Auffindung der quadratischen Form wird in den weitaus meisten Fällen sehr erschwert durch den Umstand, daß zwischendurch nach der quadratischen Form erwartete Interferenzlinien auf dem Film völlig fehlen. (Diese Tatsache verhindert es z. B., daß (3) auf Grund der Eigenschaft der Konstanz der zweiten Differenzen aufgesucht wird.) Man kann diese Tatsache folgendermaßen erklären: Die quadratische Form (3) liefert zwar die Lagen, nicht aber die Intensitäten der auftretenden Interferenzlinien. Wir haben also noch zu untersuchen, wie die Intensitäten der Linien mit dem vorliegenden Gitter zusammenhängen. Es zeigt sich, daß die Intensität der Linien im wesentlichen reguliert wird durch den sogenannten Strukturfaktor S des Gitters[1]). Haben wir ein einfaches Elementargebiet vor uns, bei dem nur die Ecken, und zwar mit lauter gleichartigen Atomen besetzt sind, dann ist der Strukturfaktor eine Konstante, und es treten alle durch (5) gegebenen Linien auf. Ist das Gitter aber komplizierter, weil außer den Ecken noch andere Punkte des Elementarbereichs besetzt sind oder weil es verschiedene Atomarten enthält, dann bekommt der Strukturfaktor einen von h_1 h_2 h_3 abhängigen Wert[2]). S kann nun für gewisse Wertetripel h_1 h_2 h_3 verschwinden. Die diesen Indizes entsprechenden Linien sind dann völlig aufgehoben. Um ein Beispiel anzugeben, möge erwähnt sein, daß im Falle des flächenzentrierten Gitters alle Linien, die durch gemischte (teils grade, teils ungrade) Indizes erzeugt werden, die Intensität Null haben.

§ 3. Graphit.

a) Einige Literaturangaben.

Daß Graphit, ebenso wie Diamant, kristallinisch ist, ist bekannt. Über das Kristallsystem und die demselben zugehörigen Zahlenwerte liegen nur einander widersprechende Zahlenangaben vor.

Nach Kenngott[3]) kristallisiert Graphit trigonal (drei gleiche Achsen unter gleichen Winkeln gegeneinander geneigt) mit einem Winkel $\alpha = 85^0\,6'$, Nordenskjöld[4]) dagegen

1) Eigentlich bedeutet die alleinige Berücksichtigung des Strukturfaktors eine Extrapolation auf lange Wellen. Daneben sind spezifische Atomeinflüsse, wenn auch in erster Näherung unberücksichtigt, dennoch unverkennbar.

2) Das Elementarparallelepiped sei durch $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$, die im Innern derselben gelegenen Strahlungszentren seien durch die Vektoren $\mathfrak{r}_1$ $\mathfrak{r}_2\ldots\mathfrak{r}_n\ldots$ charakterisiert. Der Strukturfaktor S hat dann die Form:

$$S = \sum_n A_n e^{i\varrho_n}$$

$$\varrho_n = 2\pi(\alpha_n h_1 + \beta_n h_2 + \gamma_n h_3).$$

Dabei sind die Zahlen α_n, β_n, γ_n definiert durch den Ansatz

$$\mathfrak{r}_n = \alpha_n\mathfrak{a} + \beta_n\mathfrak{b} + \gamma_n\mathfrak{c};$$

Zum $n$ten Strahlungszentrum kommt man also, indem man vom Nullpunkt aus in der $\mathfrak{a}$-Richtung um $\alpha_n\mathfrak{a}$, dann in der $\mathfrak{b}$-Richtung um $\beta_n\mathfrak{b}$ und schließlich in der $\mathfrak{c}$-Richtung um $\gamma_n\mathfrak{c}$ fortschreitet. A_n ist proportional der vom $n$ten Zentrum ausgehenden Amplitude.

3) Ber. d. Akad. Wien **13**, 469, 1854.

4) Pogg. Ann. **96**, 110, 1855.

1) Diese Zeitschr., l. c. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen 4. Dezbr. 1915.

schließt auf das monokline System mit dem Achsenverhältnis $a : b : c = 0{,}7069 : 1 : 0{,}5089$ und dem Winkel $\beta = 88^0\,14'$; H. Sjögren[1]) andererseits hält Graphit für hexagonal. Die Angabe von Kenngott hat am meisten Beachtung gefunden und ist z. B. in der chemischen Kristallographie von Groth[2]) übernommen. In neuerer Zeit hat P. P. Ewald[3]) versucht die v. Laue'sche Methode der Kristallbestimmung dienstbar zu machen. Er benutzte ein ihm von Prof. H. du Bois zur Verfügung gestelltes ausgesuchtes Graphitkriställchen von 2,2 mm Querschnitt und 0,1 mm Dicke und schließt aus seiner Interferenzaufnahme auf das hexagonale System mit einem Achsenverhältnis $c : a = 1{,}63$. Herr Prof. Jaeger, in dessen Besitz sich ein Abdruck des Ewald'schen Photogramms befindet, schreibt uns dagegen, daß Graphit nach der Ewald'schen Aufnahme nicht hexagonal, sondern trigonal sei.

Alle diese einander widersprechenden Angaben[4]) wurden erreicht mittels Methoden, welche die Verfügung über einen gut ausgebildeten Kristall genügender Größe zur Voraussetzung haben. Hierin liegt die große Schwierigkeit, die diesen Bestimmungen anhaftet, denn Stücke, die ihrem äußeren Aussehen nach als gute bezeichnet werden können, kommen nur äußerst selten vor.

b) Das Kristallsystem von Graphit.

Wir untersuchten vier verschiedene Graphitsorten, nämlich:

1. Käuflichen gewöhnlichen Ceylongraphit.
2. Flinzgraphit (Bayern), der uns von Herrn Geh. Reg. Rat Prof. Tamman gütigst zur Verfügung gestellt wurde[5]).
3. Reinsten Ceylongraphit von den Nürnberger Bleistiftwerken J. Faber[5]).
4. Graphit von L. E. C. Hardtmuth, Wien[5]).

Alle 4 Sorten erwiesen sich kristallographisch identisch.

Die Substanz wurde in ein Stäbchen von 1 mm Durchmesser und 10 mm Länge gepreßt und in der früher[6]) beschriebenen Kamera durchstrahlt. Um größere Genauigkeit zu erreichen, wurde eine Kamera von 130 mm Durchmesser gebaut. Bei dieser neuen Kamera entspricht dem Bereich $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 180^0$ eine Filmlänge von 204 mm, und die Meßgenauigkeit beträgt schon bei kleineren Winkeln ca. 2 Promille. Auf einer solchen Aufnahme wurden die fünf stärksten Linien herausgegriffen und die zugehörigen Winkel ϑ gemessen. Dann zeigte sich, daß sich die $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ darstellen ließen durch die quadratische Funktion:

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = {} & 0{,}03724\,(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) \\ & - 0{,}02001\,(h_2h_3 + h_3h_1 + h_1h_2)\,.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die in dieser Weise erreichte Genauigkeit erhellt aus folgender Tabelle:

Tabelle I.

$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beobachtet	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ berechnet	Differenz	Indizes der reflekt. Ebene
0,2265	0,2273	— 0,0008	111
0,3617	0,3629	— 0,0012	111
0,4550	0,4547	— 0,0003	222
0,6141	0,6148	+ 0,0007	022
0,6545	0,6555	+ 0,0010	113

In Tabelle II lassen wir die Ausmessung einer mit der kleinen Kamera erhaltenen Aufnahme folgen. (Der Film ist in Tafel VIII, Fig. 1 reproduziert.) Bei dieser Aufnahme entspricht dem Bereich von 180° eine Filmlänge von 81,7 mm. Die Meßgenauigkeit beträgt bei kleinen Winkeln etwa 1 Proz., bei größeren Winkeln $^1/_2$ Proz. Auf dem Original waren im ganzen 28 Linien zu erkennen. Davon hatten einige das Aussehen von Doppellinien. Die Ausmessung ergab für den jeweiligen halben Öffnungswinkel $\frac{\vartheta}{2}$ die in Spalte 2 der Tabelle in Grad angegebenen Werte. Die erste Spalte enthält die Bezeichnungen: s. s. = sehr schwach, s. = schwach, m. = mittel, st. = stark, welche eine ungefähre Schätzung der Linienschwärzung bedeuten sollen. Die Primärstrahlung bestand wesentlich aus der K-Serie des Kupfers. Die Hauptintensität der Serie wird bekanntlich von der α-Linie geführt, deren Wellenlänge nach Moseley $1{,}549 \cdot 10^{-8}$ cm beträgt. Die zweitstärkste Linie dieser Serie ist die β-Linie mit der Wellenlänge $1{,}402 \cdot 10^{-8}$ cm. Auch diese Linie hat Veranlassung zu einigen Interferenzen gegeben. Sie sind in Tabelle II in kleinem Druck angegeben. Die Auffindung der β-Interferenzen geschieht dadurch, daß man unter den Werten von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ nach Verhältnissen von der Größe $\frac{1{,}402}{1{,}549}$ sucht (unter Berücksichtigung der Intensitäten); denn wenn α- und β-Linie an der gleichen Netzebene reflektiert vorkommen, müssen sich nach (1) die zuge-

1) Oefr. Akad. Stockholm **41**, 4, 29, 1884.
2) P. Groth, Chemische Kristallographie. Leipzig 1, 13, 1906.
3) Sitzungsber. der K. B. Akad. d. Wiss. S. 325. 1914.
4) Die Angaben widersprechen sich tatsächlich und sind nicht nur durch Bezugnahme auf andere Achsensysteme verschieden.
5) Den betreffenden Herren danken wir auch an dieser Stelle für die Überlassung der Materialproben.
6) Diese Zeitschr. l. c. Kgl. Ges. d. Wiss. Gött., l. c.

hörigen Verhältnisse von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ wie die Wellenlängen verhalten. In der vierten Spalte sind die aus (5) berechneten Werte von $\sin\frac{\vartheta}{2}$ angegeben. Die Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten ist befriedigend. Die sechste Spalte enthält die relativen Intensitäten der Linien, berechnet nach der im Abschnitt c dieses Paragraphen gegebenen Regel.

Tabelle II.

Schwärzung	ϑ i. Grad	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ beob.	$h_1 h_2 h_3$	$\sin\frac{\vartheta}{2}$ ber.	Intens. ber.	Diff.
s.	23,6	0,205	111	0,206	—	— 001
st.	26,5	0,229	111	0,227	139,7	+ 002
s. s.	38,6	0,331	— 111	0,329	—	+ 002
s. s.	40,9	0,349	002	0,349	—	000
st.	43,8	0,373	— 111	0,363 | 0,375	35,0	— 002
			002	0,386	30,2	
s. s.	48,7	0,413	222	0,412	—	+ 001
m.	53,4	0,451	222	0,455	26,0	— 004
m.	55,2	0,464	022	0,467	18,3	— 003
s.-m.	62,8	0,521	113	0,519	13,5	+ 002
s. s.	67,5	0,556	0—22	0,557	—	— 001
s. s.	72,3	0,590	— 113	0,592	—	— 002
st.	76,0	0,616	0—22	0,615	33,8	+ 001
s.	78,8	0,635	133	0,638	7,7	— 003
st.	81,8	0,655	— 113	0,655	56,8	000
s.	86,2	0,683	333	0,683	8,7	000
s.	88,4	0,697	024	0,693 | 0,698	6,1	— 001
			224	0,702		
s.	91,8	0,719	11—3	0,714 | 0,720	5,9	— 001
			— 222	0,726	5,7	
st.	99,8	0,766	024	0,765 | 0,768	42,2	— 002
			024	0,772	5,2	
s. s.	107,4	0,806	— 133	0,805	5,0	+ 001
s. s.	111,9	0,829	135	0,831	—	— 002
s. s.	112,9	0,834	244	0,837	5,0	— 003
s. s.	125,7	0,889	115	0,886	5,1	+ 003
s.	131	0,910	335	0,907 | 0,909	5,2	+ 001
			444	0,910	6,9	
st.	133,6	0,919	135	0,918	41,7	+ 001
s. s.	138,2	0,934	044	0,935	5,3	— 001
s.	142	0,946	1—33	0,942	10,8	+ 004
s.-m.	144	0,951	0—24	0,951	10,9	000
			355	0,952	—	
s.	154	0,974	— 135	0,976	—	— 002

Die in (5) angegebene quadratische Form ist charakteristisch für ein rhomboedrisches Gitter, für dessen Kantenlänge und Winkel man nach (4) die Werte erhält:

$$a = b = c = 4{,}48 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}$$
$$\alpha = \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(b,c) = \sphericalangle(c,a) = 68^\circ 26'.$$

Dabei ist für die Wellenlänge der benutzten Strahlung (α Linie der Kupfer-K-Strahlung) der Wert $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen.

Wir bestätigen somit die von Groth angenommene und nach Jaeger auf Grund der Ewaldschen Interferenzaufnahme zu erschließende trigonale Struktur des Graphits. Wir finden aber den Winkel der Achsen wesentlich anders als von Kenngott angegeben.

In der Tabelle sind in der vierten Kolonne die Indizes $h_1\ h_2\ h_3$ der jeweiligen reflektierenden Ebene angegeben, bezogen auf die Rhomboederkanten.

Die Ebene 111 ist diejenige, nach welcher der Graphit außerordentlich leicht gespalten werden kann. Die in der Natur stets auftretenden Plättchen haben 111 als obere und untere Begrenzungsebene. Es ist hier eine Bemerkung von Bragg[1]) von Interesse, wonach er für den Abstand zweier solcher 111-Ebenen bei der nach seiner Methode beobachteten Reflexion an dieser Ebene (auf Grund einer einzigen Messung) den Wert $3{,}42 \cdot 10^{-8}$ cm fand. Aus unseren Angaben folgt dieser Abstand zu $3{,}41 \cdot 10^{-8}$ cm.

c) Lagerung der C-Atome im Graphit.

Nachdem nunmehr die Form und damit das Volumen des Elementarparallelepipeds bekannt sind, folgt aus der beobachteten Dichte des Graphits[2]) (ungefähr 2,2), daß in demselben acht C-Atome enthalten sind. Denn die Gleichung

$$\frac{N}{z} \cdot V = \frac{A}{\varrho} = \frac{12}{2{,}2}$$

(V Volum des Elementargebiets), deren beide Seiten das Volum eines Grammatoms ausdrücken, (die linke unter der Annahme, daß z Atome auf das Elementargebiet entfallen), ist für $z \sim 8$ erfüllt.

Die Tabelle auf der vorigen Seite, welche keine gemischten Indizes enthält, legt es nahe, für das Gitter des Graphits ein flächenbesetztes anzunehmen, weil, wie bemerkt, bei einem solchen die Interferenzen mit gemischten Indizes verschwinden. Diese Annahme bestätigt sich in der Tat, indem nicht eine einzige Linie mit gemischten Indizes auf dem Film vorhanden ist. Da aber zu jedem flächenbesetzten Elementarbereich nur vier Atome gehören, muß Graphit aus zwei solchen ineinandergestellten Gittern aufgebaut sein. Was nun noch übrig bleibt, ist die Ausführung einer Untersuchung, die darüber belehrt, in welcher Form diese gegenseitige Durchdringung der zwei flächenbesetzten Gitter auftritt. Diese Frage ist nur durch Heranziehung der Intensitäten der Interferenzlinien zu entscheiden.

Die relative Verschiebung der beiden Gitter gegeneinander kann nur längs der trigonalen Diagonale des Rhomboeders vorgenommen werden; denn die trigonale Struktur, die durch die quadratische Form (5) verlangt wird, bleibt nur bei Verschiebungen solcher Art erhalten. Es wurde

1) W. H. Bragg u. W. L. Bragg, X-Rays and Crystalstructure. London 1916, S. 174.

2) Die Angaben über das spezifische Gewicht von Graphit sind außerordentlich schwankend. Man findet Werte von 2,06 bis 2,32. Rechnet man mit einem mittleren Werte von 2,2, so ergibt sich $z = 8{,}16$.

nun eine Tabelle entworfen für die Intensität jeder möglichen Linie zwischen 0^0 und 180^0, wobei eine gegenseitige Verschiebung der Gitter um den γ-fachen Wert der Diagonale angenommen wurde. γ erhielt dabei der Reihe nach die Werte 0, 0.03, 0,06. . . usw.

Die Intensität selbst wurde proportional gesetzt einmal dem Quadrate des absoluten Betrages des zu γ gehörigen Struktorfaktors:

$$|S|^2 = 32\,[1 + \cos 2\pi\gamma\,(h_1 + h_2 + h_3)|^1)$$

Andererseits wurde der Lorentzsche Intensitätsfaktor berücksichtigt. Derselbe ist umgekehrt proportional der für $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ gefundenen quadratischen Form (5). Ferner treten noch hinzu die sog. Kombinationszahl, d. i. die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Netzebene im Gitter auftritt[2]) und der durch die Transversalität der erregenden Welle bedingte Faktor $1 + \cos^2\vartheta$.

Es zeigt sich, daß die relativen Intensitäten der Interferenzen ganz außerordentlich stark mit γ variieren.

Die so berechnete Tabelle für die Intensitäten wurde nun verglichen mit der Kurve, die durch Photometrierung[3]) einer sich von $\vartheta = 10^0$ bis $\vartheta = 160^0$ erstreckenden Graphitaufnahme erhalten wurde. Man darf aber bei dieser Diskussion nur die Intensitäten von benachbarten Linien in der Gegend von 90^0 benutzen. Denn der Film hat einen, von der unvermeidlichen Bremsstrahlung herrührenden, kontinuierlichen Grund, über dessen Intensitätsverlauf man nichts aussagen kann, außer daß er in der Nähe von 90^0 ein sehr flaches Minimum hat. In der Mitte des Films sind die Intensitäten der Linien also durch die Bremsstrahlung nicht wesentlich gefälscht.

Schon allein aus der Tatsache, daß von den zwei sich sehr nahe liegenden starken Linien (022) und (113) die zweite die stärkere ist, folgt aus der Tabelle, daß γ nur zwischen den zwei Werten 0,26 und 0,41 liegen kann. (Damit ist der von Bragg vermutete Wert $\gamma = 0{,}049$ als unmöglich erwiesen.) Auch der beim Raumgitter des Diamants (s. d. nächsten Abschnitt) vorhandene Wert von $\gamma = \frac{1}{4}$ ist hier unmöglich, weil er außer dem genannten Widerspruch noch das Verschwinden der auf unsern Aufnahmen tatsächlich vorhandenen Linien (002), (222), $(\bar{2}22)$, (024) und $(0\bar{2}4)$ zur Folge haben würde.

1) Dabei ist schon berücksichtigt, daß nur ungemischte Indizes auftreten.

2) Die Kombinationszahl hat den Wert 12, wenn alle 3 Indizes ungleich, den Wert 6, wenn 2 Indizes gleich und den Wert 2, wenn alle 3 Indizes gleich sind.

3) Benutzt wurde ein von Herrn Rümelin erbautes Kochsches Elektrophotometer.

Da ferner die Linie (024) an Intensität vergleichbar mit $(\bar{1}13)$ ist, kommen für γ nur Werte zwischen 0,31 und 0,37 in Frage. Nimmt man $\gamma = 0{,}33$, so zeigt sich, daß das Gesamtbild, das man so von den Intensitäten entwerfen kann, vollkommen unsern Aufnahmen entspricht.

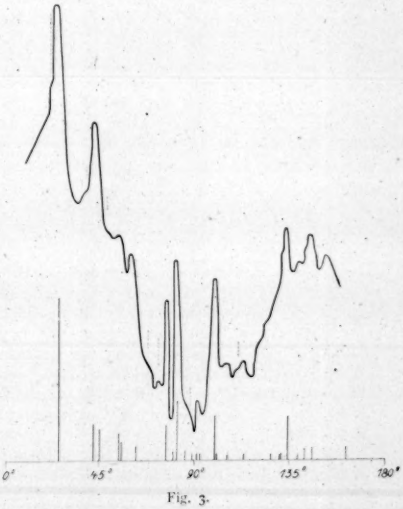


Fig. 3.

Fig. 3 zeigt eine photometrierte Graphitaufnahme[1]). Unter der Kurve sind durch vertikale Striche die berechneten Lagen und Intensitäten der α-Linien, oberhalb der Kurve punktiert die berechneten Lagen der β-Linien angegeben. (Man vergleiche insbesondere die Intensitätswerte der Tabelle II mit Fig. 3 für die Linien in der Nähe von 90^0.)

Mit der Bestimmung von γ ist die Aufgabe gelöst, und es ergibt sich für das Raumgefüge des Graphits das folgende überraschend einfache Bild:

In gleichen Abständen von je $3{,}41 \cdot 10^{-8}$ cm folgen Ebenen aufeinander, welche die C-Atome enthalten. In jeder dieser Ebenen bilden die C-Atome die Eckpunkte von regulären (nicht mitten besetzten) Sechsecken (Seitenlänge $1{,}45 \cdot 10^{-8}$ cm), welche die Ebene lückenlos überdecken. In aufeinander folgenden Ebenen liegen die C-Atome nicht senkrecht übereinander. Von einem Eckpunkt eines Sechsecks ausgehend, findet

1) Wir weisen auf die bekannte Tatsache hin, daß dem Auge vollkommen getrennt erscheinende deutliche Linien (namentlich in Gebieten stark variabler Allgemeinintensität) bei der Photometrierung nur als kleine Erhebungen zutage treten.

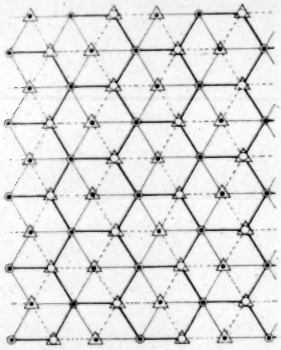


Fig. 4a.

man darüber erst zweimal die unbesetzte Mitte eines Sechsecks, dann folgt wieder eine Ecke usf. Fig. 4a zeigt den Grundriß von drei solcherweise übereinanderliegenden Ebenen, und zwar sind die in verschiedenen Ebenen angeordneten C-Atome durch verschiedene Zeichen (Punkt, Kreis, Dreieck) angedeutet. Fig. 4b zeigt, wie die C-Atome im rhomboedrischen Elementarbereich verteilt sind.

Das von uns auf diese Weise gefundene Graphitgitter muß nun, wenn es das richtige ist, die Ewaldsche[1]) Graphitaufnahme erklären. Das von Ewald hergestellte Laue-Diagramm ist in Tafel IX, Fig. 6 reproduziert; wir verdanken dasselbe Herrn A. Sommerfeld. Die Lauesche Theorie, auf unser Gitter angewandt, ergibt für die 12 starken Flecke auf bzw. zwischen den Nebenachsen die Indizes:

2114 bzw. 2025.

Der Bezeichnung sind Bravaissche Achsen mit dem Achsenverhältnis $\frac{c}{a} = 2{,}03$ zugrunde gelegt. Das von Ewald angenommene Achsenverhältnis

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}633$$

steht mit dem unsrigen in rationalem Zusammenhang. Die beiden Werte verhalten sich bis auf 1 Proz. wie 5 : 4. Die große Intensität der angegebenen Interferenzpunkte erklären wir aus der Tatsache, daß sie durch Reflexion der Wellenlänge $\lambda = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ erzeugt worden sind. Diese Wellenlänge entspricht der Silberbandkante[2]) und die Platte ist für sie selektiv empfindlich. Übrigens sind die diesen Indizes entsprechenden Linien auch auf unsern Aufnahmen, die ja mit $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ gemacht sind, als starke Interferenzen vorhanden.

1) P. P. Ewald, Sitzungsber. d. Münch. Akad. 4. Juli 1914.

2) E. Wagner, Ann. d. Phys. **46**, 885, 1915.

d) Vergleich mit der Struktur des Diamants.

Fig. 5 zeigt uns das Raumgitter des Diamants in richtigem Größenverhältnis zu dem des Graphits. Dieser ist nach den Untersuchungen der Herren Bragg[1]) ebenfalls aus zwei flächenzentrierten, gegeneinander verschobenen Gittern aufgebaut. Das Elementargebiet des Diamants ist aber ein Würfel von $3{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm Kantenlänge (der Würfel ist in der Figur mit einer Diagonale senkrecht gestellt). Das zweite Gitter ist relativ zum ersten um $^1/_4$ der Würfeldiagonale verschoben. Durch diesen Wert von γ ist bedingt, daß die mit C-Atomen bedeckten 111-Ebenen nicht mehr äquidistant sind; sie folgen sich vielmehr in Abständen, die sich wie 1 : 3 verhalten. Auch sind die C-Atome in diesen Ebenen nicht wie beim Graphit in regulären nicht mitten besetzten Sechsecken angeordnet.

Die Horizontalprojektion des mit der Diagonale senkrecht gestellten Würfels ist ein Sechseck; ebenso die Horizontalprojektion des Graphitrhomboeders. Es mag nun als eine merkwürdige und auffallende Tatsache erwähnt werden, daß diese beiden Sechsecke nicht nur der Form nach, sondern der wirklichen Größe nach völlig übereinstimmen. Daraus folgt, daß sich die Diagonale des Diamantwürfels zur Diagonale des Graphitrhomboeders verhalten muß wie die Dichte des Graphits zur Dichte des Diamants. Nach Bragg ist die Länge der Diagonale des Elementargebiets von Diamant $6{,}12 \cdot 10^{-8}$ cm. Nach unseren Messungen beträgt die Länge der Rhomboederdiagonale $10{,}22 \cdot 10^{-8}$ cm. Das Verhältnis der beiden hat den Wert $\frac{6{,}12}{10{,}22} = 0{,}598$, während das Verhältnis der Dichten $\frac{2.2}{3{,}52} = 0{,}62$ beträgt[2]).

Man kann sich das Graphitmodell aus dem Diamantmodell hervorgegangen denken durch Dilatation längs der Diagonale (im Verhältnis der Dichten) bei festgehaltenem Grundriß. Man hat aber nachträglich die C-Atome der zweiten, vierten, sechsten usw. Horizontalebene in die erste, dritte, fünfte usw. zu verlegen, so daß

1) W. H. u. W. L. Bragg, The Structure of the Diamond. Proc. Royal Soc. **89**, 277, 1913.

2) Mit dem von Moissan (Annales Ph. Ch. **8**, 466, 1896) angegebenen Wert $\rho = 2{,}11$ erhält man bessere Übereinstimmung, nämlich $\frac{2{,}11}{3{,}52} = 0{,}599$.

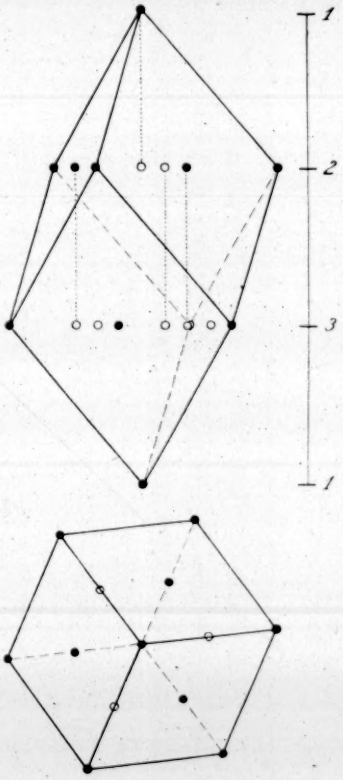


Fig. 4b.

die oben angegebenen ebenen Sechsecke des Graphits entstehen. In der Literatur wurde bemerkt, daß man mit den vier gleichen tetraedrisch angeordneten Valenzen des Kohlenstoffs nicht allein ein reguläres, sondern auch ein trigonales Gitter erzeugen kann[1]). Unsere oben angegebene Struktur des Graphits stimmt nicht überein mit der so erhaltenen trigonalen Anordnung. Auch Ewald bemerkt schon, daß sein Lauediagramm nicht unter Annahme eines solchen Graphitgitters zu erklären ist.

c) Die Anordnung der Valenzen.

In den eben genannten Ebenen gehen von jedem *C*-Atom drei gleichwertige Valenzen aus, welche dasselbe mit den nächstliegenden *C*-Atomen koppeln. Die vierte Valenz aber ist den drei eben erwähnten völlig ungleichwertig; sie dient dazu, abwechselnd nach oben oder nach unten zeigend, die *C*-Ebenen miteinander zu verbinden.

Aus dem verhältnismäßig großen Abstand, aus dem diese vierte Valenz ihre Wirkung ausübt, wird man schließen dürfen, daß die

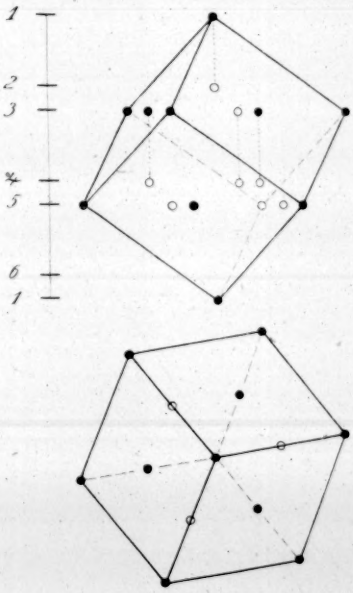


Fig. 5.

Bindung der *C*-Ebenen untereinander eine lockere sein wird. Das ist auch tatsächlich der Fall. Die hervorgehobene außerordentlich leichte Spaltbarkeit des Graphits in den (1 1 1)-Ebenen bedeutet nichts anderes als die außerordentlich leichte Trennbarkeit der mit Sechserringen besetzten Ebenen voneinander. Aber noch viel drastischer zeigt sich die Schwäche der vierten Valenz.

Einige Zeit lang wollte es nicht gelingen, die bei Graphit beobachteten Interferenzlinien in das notwendige System der quadratischen Form einzufügen. Insbesondere war die nunmehr als Reflexion an 1 1 1 erkannte Linie nicht einfach, sondern doppelt und dabei unsymmetrisch in bezug auf die Längsrichtungdes zerstreuenden Stäbchens ausgebildet. (Siehe Taf. VIII,

[1]) Mohr, Heidelberger Akad. 1916.

Fig. 2 u. 3.) Sie wurde aber einfach, nachdem wir das Graphitpulver ganz locker in eine feine Papierhülse einschichteten und so durchstrahlten. Besonders schön wurden die Aufnahmen, wenn das Graphitpulver einige Stunden auf heller Gelbglut gehalten und nachher vorsichtig behandelt wurde. Einige weitere Versuche zeigten dann, daß durch geringere oder stärkere Pressung bei der Herstellung der Stäbchen die 1 1 1-Linie nach Belieben weniger oder mehr aufgespalten werden konnte.

Diese Beobachtung heißt aber nur, daß es mit verhältnismäßig kleinen mechanischen Kräften gelingt, den Abstand der C-Ebenen abzuändern, und zwar dauernd fortbestehend, nachdem die mechanische Kraft zu wirken aufgehört hat. Bedenkt man nun noch, daß die beobachteten Abstandsänderungen mit Leichtigkeit bis auf 15 Proz. des ursprünglichen Abstandes zu steigern waren, so sieht man, wie locker die Bindung der C-Ebenen untereinander ist. Auch muß der Umstand, daß hier ein rein mechanischer Eingriff solche erheblichen Erfolge zeitigt, als äußerst merkwürdig angesehen werden.

Im Gegensatz zum Graphit sind beim Diamant alle vier Valenzen vollkommen gleichwertig. Jedes beliebig herausgegriffene Atom hat vier Nachbarn, die in genau gleichen Abständen völlig symmetrisch um dasselbe angeordnet sind.

§ 4. Amorphe Kohle.

a) Gibt es ein Kohlenstoffmolekül?

Um Aufschluß über die Konstitution der amorphen Kohle zu bekommen, wurde diese nach der in § 1 angegebenen Methode durchstrahlt.

Die erste Frage, die man sich hier vorzulegen hat, ist diese: Liegen in amorpher Kohle die C-Atome locker nebeneinander oder existiert ein Kohlenstoffmolekül mit charakteristischen Verkettungen der C-Atome? Die erste Aufnahme schon entschied zugunsten der letzteren Alternative; in amorpher Kohle sind die C-Atome zu Molekülen zusammengefaßt. Eine Aufnahme mit Kupfer-K-Strahlung gab nämlich ein Bild mit ausgeprägten Maxima und Minima. Die Maxima lagen bei $\vartheta = 24^0$, $\vartheta = 43^0$, $\vartheta = 80^0$, während nach 180^0 hin eine so starke Schwärzung auftrat, daß auch in dieser Gegend noch ein viertes Maximum liegen mußte. Kristallinisch durfte man die „amorphe" Kohle nicht nennen, denn die Breite der Maxima war sehr groß, so daß dieselben nicht vergleichbar sind mit den äußerst scharfen Interferenzen, die bei Kristallen auftreten. Nach den in § 2 besprochenen Gesichtspunkten folgern wir aus der Breite der Maxima, daß im Kohlenstoffmolekül nur verhältnismäßig wenig Atome enthalten sein können.

An dieser Stelle, wo wir zunächst die Frage nach der Existenz eines Kohlenstoffmoleküls bejahend beantwortet haben, begegnen wir uns mit gelegentlich ausgesprochenen Ansichten von chemischer Seite. Van't Hoff[1]) spricht sich auf Grund verschiedener chemischer Tatsachen dafür aus, daß das Element Kohlenstoff in Form von Molekülen auftrete und zitiert u. a. Großhanns, der durch Extrapolation der Siedepunkte einer Kohlenwasserstoffreihe von der Formel $C_{n+2}H_{2n-2}$ schließt, daß ein Körper C_3 schon bei 20^0 sieden müßte.

Es war nun die Frage zu erledigen, ob das Molekül C_n etwa von den Bedingungen bei der Darstellung der amorphen Kohle abhängt. Um dies zu entscheiden, wurde Kohle auf verschiedenen Wegen erzeugt. Wir stellten Kohle her:

1. Aus Zucker durch Schmelzen, Verkohlen und Glühen,
2. aus Azetylen (C_2H_2) durch unvollständige Verbrennung,
3. aus Naphtalin ($C_{10}H_8$) durch unvollständige Verbrennung,
4. aus Petroleum durch Verbrennung,
5. aus Zucker durch Behandlung mit konz. Schwefelsäure[2]),
6. es wurde Retortenkohle und
7. ein uns von Herrn Tammann zur Verfügung gestelltes Präparat, das aus Anthrazit gewonnen war, untersucht.

Unsere Absicht bei dieser Auswahl war, in den Ausgangsprodukten möglichst verschiedenartig gebundene C-Ringe und Ketten zugrunde zu legen.

Alle die Kohlenstoffsorten wurden durchstrahlt; sie gaben alle wesentlich dasselbe Bild: die Maxima immer an derselben Stelle.

Damit ist die Existenz eines charakterisierbaren Kohlenstoffmoleküls, wie uns scheint, dargetan.

b) Der Bau des Kohlenstoffmoleküls.

Als letzte Frage kommt nun die nach der Lagerung der Atome im Molekül.

Die Graphitaufnahmen zeigen alle neben vielen Interferenzen mit verhältnismäßig kleiner Intensität vier Linien, die sehr stark hervortreten. Sie entsprechen in der Tabelle den Indizes (1 1 1), (1 1 1), (0 $\bar{2}$ 2) und (1 $\bar{1}$ 3) und liegen bei

$\vartheta = 26^0$, $\vartheta = 43^0$, $\vartheta = 76^0$ und $\vartheta = 82^0$.

1) Van't Hoff, Ansichten über die organ. Chemie. Braunschweig, 1881, S. 23.

2) Die so erhaltene Kohle ist nicht rein.

Ein Vergleich dieser Winkel mit der angegebenen Lage der Maxima für amorphe Kohle:

$$\vartheta = 24^0,\ \vartheta = 43^0,\ \vartheta = 80^0$$

zeigt sofort eine überraschende Übereinstimmung.

Fig. 6 ist die durch Photometrierung erhaltene Intensitätskurve einer Aufnahme von Zuckerkohle. Durch die vertikalen Striche sind die Lagen und verhältnismäßigen Intensitäten der stärksten Graphitlinien angedeutet. Tafel IX, Fig. 4 führt eine Aufnahme von Anthrazitkohle mit verhältnismäßig breiten, Tafel IX, Fig. 5 eine solche von Retortenkohle mit bedeutend schmäleren Interferenzen vor Augen.

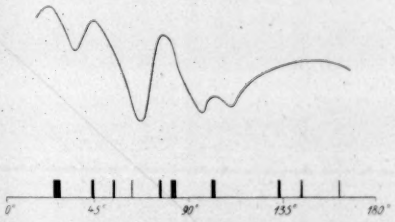


Fig. 6.

Es ist bei der Breite der Maxima nicht zu verwundern, daß die Graphitlinien $\vartheta = 76^0$ und $\vartheta = 82^0$ zu einem einzigen Band in der Mittellage $\vartheta = 79^0$ verschmolzen sind. Auch sind Abweichungen von 2^0, welche oben auftreten, wegen der Breite der Maxima durchaus zulässig.

Auf Grund dieser Tatsache kommen wir zum Schluß, daß Graphit und amorphe Kohle nicht wesentlich verschieden sind. Der einzige Unterschied ist physikalischer Natur und besteht darin, daß nur eine verschieden feine Pulverisierung desselben Kristallgitters vorliegt. Tatsächlich läßt die Breite der Kohlenstoffinterferenzen den Schluß zu, daß im Molekül oftmals nur etwa 30 Atome enthalten sind: Amorphe Kohle ist also Graphit in einer so feinen Verteilung, wie dieselbe durch mechanische Mittel niemals erreicht werden kann. Eine Stütze für diese Anschauung ergibt schließlich noch die Tatsache, daß es gelingt bei amorpher Kohle je nach der Herstellung zwar nicht die Lage der Maxima zu ändern, aber wohl die Breite derselben in gewissen Grenzen zu variieren. Man hat also je nach Umständen nur eine gröbere oder feinere Pulverisierung erreicht, aber der Molekülaufbau als Ganzes ist erhalten geblieben.

c) Das Charakteristische der beiden Kohlenstoffmodifikationen.

Wir sind also zu der Überzeugung gekommen, daß es nur zwei Kohlenstoffmodifikationen gibt: Diamant und Graphit[1]).

Ersterer ist nach den Braggschen Untersuchungen ausgezeichnet durch die Reinheit, mit welcher das Tetraeder, d. h. die vier völlig gleichwertigen Valenzen zum Ausdruck kommen. Letzterer dagegen zeigt das Kohlenstoffatom mit drei Hauptvalenzen in einer Ebene, unter 120^0 gegeneinander geneigt, und einer vierten nicht mehr gleichberechtigten, dazu senkrechten Nebenvalenz[2]).

Auch chemisch kommt diese Tatsache klar zum Ausdruck. Während eine Oxydation von Diamant durch oxydierende Mittel, wie z. B. Salpetersäure, nicht gelingt, werden sowohl Graphit als auch amorphe Kohle angegriffen, beide liefern Mellitsäure, die als Benzolhexakarbonsäure noch das reguläre Sechseck der Muttersubstanz im Benzolkern bewahrt hat[3]).

Sieht man unsre Resultate von diesem Standpunkte an, dann erscheint Kohle in Diamantform als das Prototyp der aliphatischen Chemie mit dem an der Spitze der Überlegungen stehenden Kohlenstofftetraeder. Graphit und amorphe Kohle dagegen bilden die in dem Auftreten der Sechseckstruktur augenfällig gekennzeichneten einfachsten Stufen der aromatischen Chemie, welche den Benzolkern als Hauptmerkmal führt.

---

1) Damit stimmt die Bemerkung von P. Groth (Physikal. Kristallogr. I, 11, 1906) überein, daß die Existenz anderer Modifikationen schwarzen Kohlenstoffs völlig ungewiß sei. Wie P. Groth uns mitteilt, hat er in seinen Vorlesungen seit vier Jahrzehnten die Ansicht vertreten, daß der sogenannte amorphe Kohlenstoff nur Graphit in sehr feiner Verteilung sei.

2) Wie stark die vierte Valenz zurücktreten kann, zeigt der Fall des Triphenylmethyls $C(C_6H_5)_3$, in welchem von chemischer Seite der Kohlenstoff als dreiwertig bezeichnet wird. Daß die vierte Valenz sich auch hier betätigen kann, zeigt z. B. das Molekül $(C_6H_5)_3 = C - C = (C_6H_5)_3$.

3) Um zu zeigen, daß sich Graphit von amorpher Kohle chemisch wesentlich unterscheidet, wird angegeben, daß Graphit im Gegensatz zu amorpher Kohle bei der Oxydation mit Permanganat Graphitsäure liefere. Es wurde jedoch schon von chemischer Seite (Staudenmeyer, Berl. Ber. 32, 2825, siehe besonders S. 2832) die Vermutung ausgesprochen, Graphitsäure könnte kein einheitlicher Körper sein. Wir haben, für uns von Prof. Wind aus gütigst hergestellte, Graphitsäurepräparate durchstrahlt und gefunden, daß diese Substanz keinen einheitlichen Körper darstellt. Es traten teils scharfe Linien (darunter Graphitlinien), teils sehr breite Interferenzen auf.

Göttingen, Physikalisches Institut, Mai 1917.

(Eingegangen 2. Juni 1917.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Meßmethoden der Röntgenstrahlen[1].

Von R. Glocker.

I. Prinzipielles über Messungen an homogenen und heterogenen Röntgenstrahlungen.

1. Homogene Strahlungen.

Zur Charakterisierung der Beschaffenheit eines homogenen Röntgenstrahlenbündels sind zwei Bestimmungsstücke erforderlich: Intensität und Durchdringungsvermögen, meist Härte genannt.

Intensität heißt diejenige Strahlungsenergie, welche in der Zeiteinheit (1 sec) auf die zur Strahlrichtung senkrechte Einheitsfläche (1 qcm) auftrifft. Ihre Dimension im C. G. S. System ist somit g/sec^{-3}. Das Produkt aus Intensität und Zeitdauer der Bestrahlung führt in der Röntgentechnik die Bezeichnung „Flächenenergie".

Wird die Intensität J_0 eines homogenen Strahlenbündels durch ein absorbierendes Medium von der Schichtdicke d cm auf den Betrag J_1 geschwächt, so liefert die experimentell bestätigte Gleichung[2]

$$J_1 = J_0 e^{-\mu d}, \qquad (1)$$

die Definition einer Größe μ, durch welche das Durchdringungsvermögen dieser Strahlung eindeutig bestimmt ist, sofern das absorbierende Medium keinerlei selektive Absorptionserscheinungen zeigt. Die Größe μ ist eine für die betreffende Strahlung charakteristische Materialkonstante und wird „Absorptionskoeffizient" genannt.

Als Kennzeichen der „Homogenität" einer Strahlung läßt sich die Bedingung aufstellen, daß der prozentuale Absorptionsverlust in einer zweiten gleichdicken Schicht eines absorbierenden Mediums ebenso groß ist wie in der ersten Schicht:

$$\frac{J_1 - J_2}{J_1} = \frac{J_0 - J_1}{J_0}$$

also

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{J_1}{J_0} = e^{-\mu d}. \qquad (2)$$

Bei homogenen Strahlungen ist somit der experimentell erhaltene Wert des Absorptionskoeffizienten μ unabhängig von der Anzahl und Dicke der passierten Schichten.

Eine anschauliche Vorstellung von dem Durchdringungsvermögen einer Strahlung vermittelt der Begriff der „Halbwertschicht", welcher von Christen[1]) in die medizinische Bestrahlungslehre eingeführt wurde. Unter Halbwertschicht wird diejenige Schichtdicke eines Stoffes verstanden, welche die Intensität einer gegebenen Strahlung durch Absorption auf die Hälfte reduziert. Die Beziehung zwischen Halbwertschicht a und Absorptionskoeffizient μ ergibt sich aus Gl. (1): $\frac{1}{2} = e^{-\mu a}$, somit

$$a = \frac{\lg \text{nat } 2}{\mu} = \frac{0{,}693}{\mu}. \qquad (3)$$

Aus der Gleichung (4) und aus der obigen Definition der Homogenität folgt, daß bei homogenen Strahlungen die Einschaltung von Filtern beliebiger Beschaffenheit auf die Messung der Halbwertschicht keinen Einfluß ausübt.

Die elektromagnetische Auffassung der Röntgenstrahlen führt auf eine zweite Definition des Begriffes Härte. Durch die Lauesche Entdeckung der Abbeugung der Röntgenstrahlen beim Durchgang durch Kristallraumgitter wurde die Erzeugung von Röntgenspektren ermöglicht, so daß nunmehr die Röntgenstrahlen als eine Art Licht mit sehr kleiner Wellenlänge betrachtet werden dürfen. In ähnlicher Weise wie im optisch sichtbaren Gebiet die Verschiedenheit der Farbe des Lichtes physikalisch bedingt ist durch die Größe der Wellenlänge, so kann das verschiedene Durchdringungsvermögen der Röntgenstrahlen aufgefaßt werden als eine Folge der verschiedenen Größe der Wellenlängen. Wie Kossel[2]) und Siegbahn[3]) gezeigt haben, wird bei normal absorbierenden Stoffen der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Absorptionskoeffizient durch die Gleichung

$$\mu = A \lambda^b \qquad (4)$$

[A und b sind Materialkonstanten]

dargestellt. Die langwelligen Strahlen werden unter sonst gleichen Umständen stärker absorbiert als die kurzwelligen, so daß die Begriffe langwellig und weich, kurzwellig und hart, identisch sind. Bei Stoffen mit selektivem Absorptionsverhalten dagegen entspricht ein und derselbe Zahlenwert des Absorptionskoeffizienten zwei verschiedenen Wellenlängen. Die Definition der Härte einer Strahlung durch den Absorptionskoeffizienten ist daher immer gebunden an die besonderen Eigentümlichkeiten des zur Absorptionsmessung verwendeten Körpers. Da der Zahlenwert dieses Härtemaßes je nach der Wahl

1) Der Physiker, der sich mit den Meßmethoden der Röntgenstrahlen-Technik zu befassen hat, stößt dort auf eine Fülle von Unklarheit und Unexaktheit über die Grundlagen. Wir haben daher Herrn Dr. Glocker gebeten, über dieses Gebiet zusammenfassend zu berichten und vom Standpunkt der heutigen Physik aus alle vorgeschlagenen Methoden kritisch zusammenzustellen. Wir hoffen damit zu helfen, daß bald die großen Fortschritte der Röntgenphysik auch der Technik der Röntgenstrahlen in vollem Umfange zugute gebracht werden. Die Schriftleitung.

2) Abgesehen von der Intensitätsschwächung infolge Zerstreuung; vgl. hierzu Gl. (14).

1) Christen, Messung und Dosierung der Röntgenstrahlen, Hamburg 1913.

2) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **20**, 903, 1914.

3) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.

des absorbierenden Mediums wechselt und da kein Stoff a priori für die Verwendung als Normalkörper besonders bevorzugt erscheint, so daß die Wahl einer gewissen Willkür überlassen bleibt, kann ein absolutes Härtemaß auf diesem Wege nicht erhalten werden. Nimmt man dagegen die Wellenlänge als zweites Bestimmungsstück einer homogenen Strahlung, so ist deren Härte damit in dem absoluten Maß der Längeneinheit ausgedrückt. Es erscheint daher zweckmäßig, bei allen Härteangaben künftighin nur noch die Wellenlänge als rationelles Härtemaß zu benützen.

Für den Begriff „homogene Strahlung" ergibt sich nunmehr folgende Definition: Homogene Röntgenstrahlen enthalten nur Wellenlängen eines sehr engen Spektralbezirkes. Unter der Voraussetzung der Beibehaltung endlicher Breite darf dieser Spektralbereich beliebig eng angenommen werden, so daß er, je nach der Genauigkeit des Meßverfahrens, unter Umständen durch die Angabe einer einzigen Wellenlänge hinreichend bestimmt ist. Die Anforderungen, die an die Homogenität einer Strahlung, d. h. an die Ausdehnung dieses Spektralbereiches gestellt werden, sind von Fall zu Fall verschieden. Für die medizinischen Anwendungen wird z. B. eine Strahlung, deren längste und kürzeste Wellenlänge sich um etwa 10 Proz. unterscheiden, noch als homogen bezeichnet werden dürfen.

2. Heterogene Strahlungen.

Die am häufigsten vorkommenden Röntgenstrahlungen sind Mischungen verschieden harter Strahlen, d. h. sie bestehen aus einer Vielheit von Wellenlängen, deren Intensitäten im allgemeinen verschieden groß sein werden. Aus der Kontinuität des Röntgenspektrums folgt, daß zur Charakterisierung solcher heterogener Strahlungen eigentlich unendlich viele Bestimmungsstücke erforderlich sind. Je nach dem erstrebten Genauigkeitsgrad der Messung kann man sich jedoch das ganze Spektrum eingeteilt denken in eine Anzahl N gleich breiter Intervalle. Bestimmt man die Strahlungsintensität in jedem Spektralbereich und kennt man dessen mittlere Wellenlänge, so genügen diese zwei N Bestimmungsstücke zur eindeutigen Beschreibung des untersuchten Strahlengemisches. Eine solche Einteilung in Spektralbezirke ist gleichbedeutend mit einer Zerlegung des Strahlengemisches in eine Anzahl N homogener Strahlungen von verschiedener Durchdringungsfähigkeit und Intensität.

Eine Intensitätsmessung an heterogenen Strahlungen liefert die Gesamtintensität aller Spektralbezirke. Die Voraussetzung der praktischen Durchführbarkeit dieser Messung ist folgende: homogene Strahlen verschiedener Härte müssen bei gleicher Intensität gleiche Wirkung auf das Strahlungsreagens hervorbringen. Bei Besprechung der einzelnen Meßmethoden im Abschnitt II wird sich jedoch ergeben, daß der Realisierung dieser Forderung bedeutende Schwierigkeiten entgegenstehen.

Die Aufgabe, die Intensitäten der einzelnen homogenen Komponenten des Strahlengemisches zu bestimmen, kann durch Intensitätsmessungen allein nicht gelöst werden. Es ist hierzu eine Kombination von Intensitäts- und von Härtebestimmungen erforderlich, wobei unter Härtebestimmungen alle Methoden verstanden werden sollen, welche dazu dienen, die einzelnen Strahlungskomponenten voneinander gesondert in Erscheinung treten zu lassen.

Wird nur eine einzige Härtebestimmung an einem Strahlengemisch vorgenommen, so wird dadurch ein Mittelwert des Durchdringungsvermögens der Strahlung gewonnen, welcher „mittlere Härte" genannt wird. Wird die Intensität J_0 einer heterogenen Strahlung in einer absorbierenden Schicht von der Dicke d cm auf den Betrag J_1 geschwächt, so kann in jedem Falle eine homogene Strahlung ausfindig gemacht werden, welche dieselbe Schwächung $\frac{J_1}{J_0}$ erleiden würde und deren Absorptionskoeffizient μ sich aus Gleichung 1 berechnen läßt; μ heißt dann der „mittlere Absorptionskoeffizient" des Strahlengemisches. Läßt man das Strahlengemisch eine zweite gleich dicke und gleich beschaffene Schicht passieren, so ist die beobachtete Intensitätsschwächung kleiner als diejenige, welche die homogene Strahlung mit demselben Absorptionskoeffizienten μ erleiden würde. Diese Härtung des Strahlengemisches rührt davon her, daß in der ersten Schicht die weichen Strahlungsgruppen relativ viel stärker absorbiert werden wie die harten, so daß in der Strahlung vor dem Eintritt in die zweite Schicht die harten Strahlen in relativ größerer Intensität vertreten sind, als in der ursprünglichen Strahlung. Mit Rücksicht auf diese Abhängigkeit des Zahlenwertes des Absorptionskoeffizienten von der Dicke der absorbierenden Schicht ist es unbedingt erforderlich bei Absorptionsmessungen an heterogenen Strahlungen anzugeben, an welcher Schichtdicke die Messung des Quotienten $\frac{J_1}{J_0}$ stattfand. Am einfachsten erfolgt diese Angabe durch Anhängen eines Index: $\mu_{0,1}$ würde z. B. bedeuten, daß die zur Bestimmung von μ benützte Schicht 0,1 cm dick war. Es ist ferner zweckmäßig, bei Strahlengemischen nicht schlechtweg vom „Absorptionskoeffizienten", sondern vom „mittleren Absorptionskoeffizienten" zu sprechen, da sein Zahlen-

wert das Ergebnis einer Mittelbildung gemäß Gleichung 6 darstellt:

$$e^{-\mu d} = \frac{\sum_1^n J e^{-\mu d}}{\sum_1^n J} = \frac{J_1 e^{-\mu_1 d} + J_2 e^{-\mu_2 d} + \cdots + J_n e^{-\mu_n d}}{J_1 + J_2 + \cdots J_n} \quad (5)$$

Die Größen unter den Σ-Zeichen bedeuten Intensitäten und Absorptionskoeffizienten der einzelnen homogenen Strahlungskomponenten. Durch die Bezeichnung „mittlerer Absorptionskoeffizient" wird ferner zum Ausdruck gebracht, daß es sich bei der betreffenden Absorptionsmessung um heterogene Röntgenstrahlen handelt und daß infolgedessen der gewonnene Zahlenwert eine Funktion der absorbierenden Schichtdicke ist.

Dasselbe gilt für den Begriff der Halbwertschicht; bei Strahlengemischen ist die zweite Halbwertschicht a_2 stets größer als die erste a_1. Nach dem Vorschlag von Christen[1]) kann der Quotient $h = \frac{a_2}{a_1}$ als Maß für die Heterogenität betrachtet werden. Der Minimalwert ergibt sich im Falle einer homogenen Strahlung zu $h = 1$.

Duane und Hunt[2]) bezeichnen diejenige Wellenlänge, welche dieselbe Absorbierbarkeit in Aluminium besitzt wie das ganze Strahlengemisch, als die „effektive Wellenlänge" des Gemisches. Um eindeutig zu sein, bedarf jedoch diese Definition noch des Zusatzes, wie dick die zur Absorptionsmessung benützte Schicht sein soll.

Die verschiedenen Methoden zur Messung der Intensität und Härte lassen sich in zwei Klassen einteilen: Während die einen Verfahren die unmittelbaren Wirkungen der Strahlen zum Gegenstand der Messung machen, befassen sich die anderen mit den die Erzeugung der Strahlen begleitenden Erscheinungen. Es liegt in der Natur der Sache, daß die letzteren Methoden über die Veränderungen, die die Strahlen nach dem Verlassen der Röntgenröhre erleiden, keine Auskunft zu geben vermögen. Eine Bezeichnung der beiden Klassen als direkte und indirekte Meßmethoden wird dadurch nahegelegt, daß nur die Methoden der ersten Klasse eine direkte Untersuchung der Strahlung an jeder beliebigen Stelle des Außenraumes gestatten.

II. Methoden der Intensitätsmessung.

Bei den direkten Methoden der Intensitätsmessung lassen sich drei Gruppen unterscheiden, je nachdem die thermischen, elektrischen oder chemischen Wirkungen der Röntgenstrahlen die Grundlage bilden. Bei den elektrischen Wirkungen kommt neben dem Ionisationseffekt in Gasen die elektrische Aufladung isolierter Körper im Vakuum in Betracht. Auch die bei Bestrahlung auftretende Widerstandsänderung des Selens hat neuerdings zu Meßzwecken Anwendung gefunden. Die Gruppe der chemischen Wirkungen umfaßt die Schwärzung der photographischen Emulsion, die Fluoreszenzerregung zahlreicher Stoffe, sowie die Ausfällung von Salzen aus ihren Lösungen. Als vierte Gruppe schließen sich sodann diejenigen Methoden an, welche nach der früheren Definition als „indirekte" zu bezeichnen sind (Messungen am Röhrenstromkreis).

1. Gruppe: Messung der Wärmewirkung.

Wird ein dünnes Metallblech von möglichst kleiner Wärmekapazität dem Strahlengang ausgesetzt, so kann mit sehr empfindlichen Meßinstrumenten eine geringe Temperaturerhöhung desselben nachgewiesen werden. Die beobachtete Temperaturerhöhung darf unter folgenden Voraussetzungen als ein Maß für die in dem Metallblech absorbierte Strahlungsenergie angesehen werden:

1. Wenn die erzeugte Wärmewirkung der Energie der Strahlung entstammt.

2. Wenn die absorbierte Strahlungsenergie restlos in Wärme verwandelt wird.

3. Wenn Wärmeverluste durch Strahlung und Leitung ausgeschlossen sind.

1. Radiometrische Versuche von Bumstead[1]), welcher bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie in einem Bleiblech eine doppelt so große Erwärmung beobachtete wie in einem Zinkblech, schienen darauf hinzudeuten, daß die Größe der Wärmewirkung eine individuelle Eigenschaft jedes Elements sei. Nach Analogie der radioaktiven Zerfallsprozesse wurde angenommen, daß eine Transformation der inneren Energie des Atoms in Wärme stattfindet und daß den Röntgenstrahlen hierbei nur eine Art auslösende Wirkung zukommt. Eine Nachprüfung dieser Versuche durch Angerer[2]), welcher an Stelle des Radiometers eine Differentialthermosäule von Eisenkonstanten-Elementen benützte, führte zu einem negativen Resultat, worauf Bumstead selbst seine früheren Ergebnisse auf Versuchsfehler zurückführte. Es spricht somit kein experimenteller Beweis gegen die Annahme einer Proportionalität zwischen absorbierter Strahlungsenergie und erzeugter Wärme.

2. Bei allen Metallen wird — mit zunehmendem Atomgewicht in steigendem Maße — ein Bruchteil der absorbierten Strahlungs-

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. XXIII, 214, 1915.
2) Phys. Rev. **6**, 166, 1915.

1) Phil. Mag. 11, 292, 1906; **15**, 432, 1908.
2) Ann. d. Phys. **24**, 370, 1907.

energie in Sekundärstrahlungsenergie (zerstreute Strahlung, charakteristische Eigenstrahlung des Metalls, Auslösung sekundärer Kathodenstrahlen) verwandelt. Ein Teil dieser Sekundärstrahlen wird innerhalb des Metallbleches absorbiert und liefert einen seiner Energie äquivalenten Beitrag zur Wärmeerzeugung, während ein anderer Teil durch die Oberfläche des Metalles austritt und sich so der Messung entzieht. Sind in der primären Strahlung solche Spektralbezirke mit großer Intensität vertreten, welche zum Erregungsbereich der Eigenstrahlung des betreffenden Metalls gehören, so kann diese Fehlerquelle einen erheblichen Einfluß auf das Meßresultat erlangen. Für die Metalle *Fe* bis *Zn* kann die Größe dieses Korrektionsgliedes berechnet werden[1]); in allen anderen Fällen müßte sie durch einen besonderen Versuch bestimmt werden.

3. Wärmeverluste durch Ausstrahlung und Leitung können durch Anwendung von Nullmethoden kompensiert werden: Durch Zuführung einer entsprechend bemessenen, bekannten Wärmemenge kann erreicht werden, daß das absorbierende Metallblech dieselbe Temperaturerhöhung erfährt wie durch die Wirkung der Röntgenstrahlen. Die Messung der zugeführten Wärme liefert somit die in absolutem Maß gemessene absorbierte Strahlungsenergie.

Die Bestimmung der äußerst geringen Temperaturänderungen erfordert sehr empfindliche Methoden. In Betracht kommen sämtliche Meßverfahren, welche für die Zwecke der Erforschung der Wärmestrahlung seinerzeit ausgebildet worden waren, nämlich

a) Luftthermometer,
b) Flächenbolometer,
c) Thermosäule,
d) Radiometer,
e) Radiomikrometer.

a) Die Methode des Luftthermometers verdient insofern besonderes historisches Interesse, als Dorn[2]) damit die erste Messung der Energie der Röntgenstrahlen durchgeführt hat. Zwei symmetrische, verschlossene Glasröhren, von denen die eine die der Strahlung ausgesetzten Metallbleche enthielt, waren durch eine Töplersche Drucklibelle miteinander verbunden. Die Luft des die absorbierenden Bleche enthaltenden Zylinders erfuhr während einer Bestrahlung von 30 Sekunden eine Temperaturerhöhung von etwa 10^{-3} Grad, je nach der Art der Metallbleche, (*Pt*, *Pd*, *Al*, *Sn*). Mit Gleichstrom bekannter Stärke wurden hierauf die Bleche bis zu der beobachteten Temperatur elektrisch geheizt; die gesuchte absorbierte Strahlungsenergie ist dann gleich der Jouleschen Wärme. Ohne Berücksichtigung der Absorption in der Glaswand der Röntgenröhre ergab sich die bei einem Entladungsschlag des Induktoriums emittierte Strahlungsenergie zu 0,3 mg/cal.

b) Die Einführung des Flächenbolometers in die Röntgenstrahlenmessung erfolgte durch eine Arbeit von Schöps[1]), dessen Bolometer ziemlich genau der Dimension des von Lummer und Kurlbaum[2]) zur Bestimmung der Wärmestrahlung angegebenen Bolometers nachgebildet war. Im Gegensatz dazu besaßen die von Rutherford[3]), Wien[4]) Angerer[5]), Carter[6]) benützten Flächenbolometer eine 20—45 mal so große wirksame Oberfläche. Als absorbierendes Metallblech diente ein etwa 3 m langer Streifen von 5 mm breitem und 0,03 mm dickem Platinband, welches auf einen Glimmerrahmen aufgewickelt war. Das Prinzip des Bolometers ist folgendes: Haben die vier Zweige einer Wheatstoneschen Brücke genau gleichen Widerstand und erleidet einer dieser Zweige *a* durch Temperaturänderung eine relative Widerstandsänderung δ, so wird das vorher stromlose Galvanometer *G* (Fig. 1) von einem Strom durchflossen,

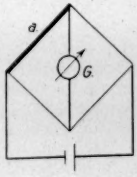


Fig. 1.

dessen Größe proportional δ ist. Der Ausschlag des Galvanometers ist somit ein direktes Maß für die Temperaturänderung des Zweiges *a*. Eine ungleichmäßige Erwärmung der einzelnen Zweige (z. B. durch Luftströmungen) bewirkt daher ein fortgesetztes Wandern des Nullpunktes des Galvanometers. Durch Bestrahlung zweier gegenüberliegender Brückenzweige kann unter sonst gleichen Umständen ein größerer Galvanometerausschlag erzielt werden. Zur Vermeidung

1) Der Energieanteil, welcher in Form von charakteristischer Sekundärstrahlung durch eine ∞ dicke Platte austritt, berechnet sich nach Sadler (Phil. Mag. **18**, 126, 1909) zu $\frac{K}{\mu + \nu}$; K Emissionskoeffizient (Zahlenwerte bei Sadler), μ und ν Absorptionskoeffizienten der Primär- und Sekundärstrahlung in der Platte.

2) Wied. Ann. **63**, 160, 1897.

1) Diss. Halle 1899.
2) Wied. Ann. **46**, 204, 1892.
3) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
4) Ann. d. Phys. **18**, 991, 1905.
5) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.
6) Ann. d. Phys. **21**, 955, 1906.

der unter 3. besprochenen Fehlerquelle wird in den meisten Arbeiten das Bolometer nicht zur direkten Messung der Temperaturänderung, sondern als Nullinstrument benützt. Durch Heizung des Bolometerzweiges *a* mittelst eines Wechselstroms (in der Schaltung der Rubens-Palzowschen Doppelbrücke) wird der gleiche Galvanometerausschlag hergestellt wie der unter der Strahlenwirkung sich ergebende Ausschlag. Die weitgehendste Kompensation beider Wirkungen wurde in der Arbeit von Angerer durchgeführt: In der Überlegung, daß die Ausstrahlungsverluste bei der intermittierenden Erwärmung durch die Wirkung der Röntgenstrahlen andere sein werden als bei einer kontinuierlichen Erwärmung durch sinusförmigen Wechselstrom, wird die Heizung durch die aperiodischen Ladungs- und Entladungsstromstöße eines Kondensators besorgt, welcher synchron mit den Unterbrechungen im Primärkreis des Induktoriums auf die Spannung einer Gleichstrombatterie aufgeladen bzw. entladen wurde.

c) Die Bedenken von Rutherford gegen eine Verwendung der Thermosäule zur Messung der Wärmewirkung von Röntgenstrahlen, nämlich daß die Wärmeabgabe aus dem Inneren der Thermosäule, wo die Röntgenstrahlen absorbiert werden, in anderer Weise erfolge, als die Ableitung der zur Eichung benützten oberflächlich absorbierten Wärmestrahlung, wurden von Wien[1]) widerlegt, welcher mit Thermosäule und Bolometer übereinstimmende Meßresultate erhielt. Die Empfindlichkeit einer Säule von 30 Wismut-Antimon-Thermoelementen mit zusammen 1,4 qcm Oberfläche erreichte ungefähr die eines Bolometers von 225 qcm Oberfläche. Die Eichung der Thermosäule erfolgte mittelst der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers von 100°. Gegenüber der Bolometermethode besitzt die Thermosäule nach Wien den Vorzug, daß die auffallende Strahlung völlig absorbiert wird, so daß die Korrektion für den Teil der Strahlungsenergie, welcher das Bolometerblech unabsorbiert durchdringt (10—25 Proz. bei Angerer), in Wegfall kommt. Die außerordentlich durchdringenden Strahlen der modernen Röntgenapparate würden allerdings auch in einer Thermosäule nur zum Teil absorbiert werden.

d) Das Bumsteadsche Radiometer bestand aus zwei sehr dünnen Aluminiumflügeln, die durch ein Glasrohr verbunden, an einem Quarzfaden im Vakuum aufgehängt waren (optimaler Druck etwa 0,05 mm *Hg*). Vor dem einen Flügel befindet sich in Form eines Fensters der die Röntgenstrahlen absorbierende Stoff, dessen Temperaturerhöhung eine vermehrte Emission von Wärmestrahlen und infolgedessen eine Drehung des beweglichen Systems veranlaßt. Nach den Resultaten zu schließen, scheint die Zuverlässigkeit der radiometrischen Methode nur gering zu sein.

e) Nach dem Prinzip von Boys[1]) hat Adams[2]) folgendes Radiomikrometer konstruiert: Ein in sich geschlossenes Kupferkonstantan-Thermoelement war leicht drehbar in einem kräftigen Magnetfeld aufgehängt. Auf der einen Lötstelle lag ein dünnes Platinscheibchen, in welchem die Strahlen absorbiert wurden, während die andere Lötstelle vor der Strahlung geschützt war. Der entstehende Thermostrom bewirkt eine Drehung des Systems im Magnetfeld. Die Empfindlichkeit ist ungefähr dieselbe, wie die der Wienschen Thermosäule

$$1 \text{ Skalenteil} = 6 \times 10^{-8} \frac{\text{cal}}{\text{sec/qcm}}.$$

Einer weiteren Empfindlichkeitssteigerung dieser Methode wird dadurch Einhalt geboten, daß die zum Aufbau des Thermoelements benützten Metalle nicht magnetisch indifferent gemacht werden können.

2. Gruppe: Messung der elektrischen Wirkungen.

1. Ionisation in Gasen.

Die am häufigsten benützte Methode zur quantitativen Intensitätsbestimmung von Röntgenstrahlen beruht auf deren Fähigkeit, Gase zu ionisieren. Ist die an den Ionisationskondensator angelegte Spannung groß genug, um alle erzeugten Ionen ohne Rekombinationsverluste an die Elektroden zu transportieren, so ist die Stärke des Stromes ein Maß für die in der Zeiteinheit erzeugte Ionenzahl (Sättigungsstromstärke). Das empirische Kriterium des Sättigungszustandes bildet die Unabhängigkeit der Stromstärke von der Spannung unter sonst gleichen Bedingungen.

Alle Ionisationsmessungen von Strahlungsenergien beruhen auf der Voraussetzung, daß die pro Volumeinheit des Gases erzeugte Ionenzahl, unabhängig von der Härte der Strahlen, direkt proportional der in der Volumeinheit absorbierten Strahlungsenergie ist. Hieraus folgt, daß bei einer Intensitätsvergleichung homogener Strahlen verschiedener Härte nicht ohne weiteres die Sättigungsströme den gesuchten Intensitäten direkt proportional sind, da bei der Messung nur ein geringer, von der Härte abhängiger Bruchteil der Strahlungsenergie in dem Gasraum der Ionisierungskammer zur Absorption gelangt.

1) l. c.

1) Proc. Roy. Soc. **42**, 189, 1887.
2) Phys. Rev. **24**, 246, 1907.

Werden die Sättigungsströme i_1 und i_2 in einem Gasvolumen von der Tiefe l cm bestimmt, so gilt die Gleichung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mu_1 J_1}{\mu_2 J_2} \qquad (6)$$

(μ_1 und μ_2 Absorptionskoeffizienten in Luft, J_1 und J_2 auffallende Intensitäten), weil bei Luft als ionisiertem Gas und den üblichen Dimensionen der Kammer $\mu_1 l$ und $\mu_2 l << 1$ ist. Da das Absorptionsgesetz der Luft nahezu mit dem des Aluminiums übereinstimmt (Siegbahn[1]), dürfen für $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ die entsprechenden Absorptionskoeffizienten des Aluminiums, deren Ermittlung leichter durchführbar ist, eingesetzt werden.

Die Versuchsresultate Angerers[2], daß die Ionisation der bolometrisch gemessenen Strahlungsenergie proportional ist, werden häufig als experimenteller Beweis der obigen Voraussetzung (Ionenzahl unabhängig von der Härte stets proportional der absorbierten Energie) angeführt. Da jedoch durch die Versuchsbedingungen (Verwendung der gleichen Röhre bei verschiedenen Primärstromstärken) das emittierte Röntgenspektrum nur eine unwesentliche Änderung erfahren konnte, muß die Gültigkeit dieses experimentellen Resultates auf homogene Strahlen und auf Strahlengemische von nahezu gleicher Zusammensetzung beschränkt werden. Eine irrtümliche Verallgemeinerung dieser Versuchsergebnisse, nämlich daß die Proportionalität zwischen Ionisation und absolut gemessener Strahlungsenergie immer, d. h. bei beliebiger Zusammensetzung der Strahlungen, vorhanden sei, hat dazu geführt, daß in der Röntgentechnik häufig der Quotient der Sättigungsströme zweier Strahlengemische von ganz verschiedener Zusammensetzung direkt als Quotient der auffallenden Intensitäten angesehen wird, ein Verfahren, das zu sehr erheblichen Fehlern führen muß. Denkt man sich nämlich zwei Strahlengemische mit gleicher Gesamtintensität J aus den zwei homogenen Komponenten mit den Absorptionskoeffizienten μ_1 und μ_2 so zusammengesetzt, daß die Intensität der Komponenten μ_1 im ersten Gemisch αJ, im zweiten Gemisch βJ beträgt, so sind die in der gleichen Ionisationskammer erhaltenen Sättigungsströme beider Gemische i_1 und i_2 proportional mit $\alpha J \mu_1 + (1-\alpha) J \mu_2$ bzw. $\beta \mu_1 J + (1-\beta) \mu_2 J$. Die Ionisationswirkung beider Gemische ist also immer eine verschiedene (mit Ausnahme des trivialen Falles $\alpha = \beta$, Identität beider Strahlungen), während bei einer bolometrischen Messung die Strahlungsintensitäten beider Gemische gleich groß gefunden würden.

1) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.
2) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.

Christen[1], hat die für alle Ionisationsmessungen prinzipiell wichtige Frage erhoben, ob nicht etwa das Umsetzungsverhältnis zwischen absorbierter Strahlungsenergie und Ionisationswirkung eine Funktion der Wellenlänge der einfallenden Strahlen sei; zutreffenden Falles würde Gleichung (6) außer Gültigkeit gesetzt werden. Eine direkte Prüfung der Gleichung (6) durch Messung der Sättigungsströme einerseits und durch bolometrische Bestimmung der Intensitäten andererseits wäre in dieser Hinsicht von größtem Interesse. Durch die Versuchsergebnisse von Owen[2] und Barkla[3], daß das Verhältnis der Ionisationen homogener Strahlen gleicher Härte in verschiedenen Gasen (ausgenommen solche mit charakteristischer Eigenstrahlung) bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie für alle Wellenlängen nahezu gleich groß gefunden wird, wird die Vermutung nahegelegt, daß auch die Ionisationswirkung verschiedener Wellenlängen in ein und demselben Gase bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie gleich groß ist. Berücksichtigt man jedoch andererseits, daß nach den Versuchen von Wilson[4] die Ionenbildung fast ausschließlich von den im Gase ausgelösten sekundären Elektronen besorgt wird und daß deren Geschwindigkeit nicht von der Intensität, sondern nur von der Wellenlänge der einfallenden Röntgenstrahlen abhängt, so gelangt man zu dem Schluß, daß die den kurzen Wellenlängen entsprechenden Elektronen infolge ihrer größeren kinetischen Energie bei gleicher absorbierter Strahlungsenergie, d. h. bei gleicher erzeugter Elektronenzahl eine größere Anzahl Ionen bilden. Da nach den Arbeiten von Rutherford[5] nur ein geringer Bruchteil der gesamten absorbierten Strahlungsenergie in Ionisierungsarbeit transformiert wird, wäre es wohl denkbar, daß dieser Umsetzungskoeffizient eine Funktion der Wellenlänge ist. Die von Christen aus anderem Anlaß erhobenen Zweifel an der Richtigkeit einer von der Wellenlänge unabhängigen Proportionalität zwischen Ionisation und absorbierter Strahlungsenergie werden somit durch die Anschauungen über den Mechanismus der Ionisation gestützt[6].

1) Diese Zeitschr. **17**, 23, 1916.
2) Proc. Roy. Soc. **86**, 426, 1912.
3) Phil. Mag. **25**, 832, 1913.
4) Proc. Roy. Soc. **85**, 285, 1911.
5) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
6) In verschiedenen Arbeiten, z. B. bei Owen (Proc. Roy. Soc. **86**, 426, 1912) findet sich folgender Ansatz zur Berechnung der in einem Gasvolumen vom Querschnitt 1 qcm und von der Länge l cm erzeugten Ionenzahl

$$q = \int_0^l A J_0 e^{-\mu x} dx, \qquad (I)$$

μ Absorptionskoeffizient der betreffenden homogenen Strahlung, J_0 deren Intensität vor dem Eintritt in das

Bei der Messung kleiner Strahlungsintensitäten bietet die Verwendung schwerer Gase an Stelle der Luft (z. B. Aethylbromid, Methyljodid) den Vorteil wesentlich größerer Ionisierungsströme. Dem steht der Nachteil gegenüber, daß infolge der selektiven Absorption die Intensität gewisser Wellenlängen bei der Messung ungebührlich bevorzugt wird (bei Brom etwa $\lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm bei Jod etwa $\lambda = 0{,}35 \cdot 10^{-8}$ cm), so daß dieses Verfahren im allgemeinen bei Strahlengemischen nicht anwendbar ist. Eine zweite Möglichkeit zur Erhöhung der Sättigungsstromstärke liefert die Vergrößerung des Elektrodenabstandes, da die Gesamtzahl der erzeugten Ionen dem durchstrahlten Gasvolumen direkt proportional ist.

Bei der Konstruktion der Ionisationskondensatoren ist vor allem die Vermeidung einer Sekundärstrahlung der Wände anzustreben. Durch Anordnung entsprechender Blenden wird erreicht, daß Wände und Elektroden der Kammer nicht von der direkten Strahlung getroffen werden können. Um die durch die Sekundärstrahlung des Gases (zerstreute Strahlung, charakteristische Eigenstrahlung bei schweren Gasen) veranlaßte Elektronenemission der Wände und Elektroden möglichst klein zu halten, werden diese aus leichten Stoffen verfertigt (meist Aluminium mit Papierbelegung). Der Einfluß einer solchen sekundären Elektronenemission macht sich dadurch bemerkbar, daß die Sättigungsströme bei Variation des Elektrodenabstandes diesem nicht proportional sind. Einen in dieser Hinsicht fehlerfreien Kondensator hat Seemann[1]) aus trommelfellartig aufgespanntem, glyzeringetränktem Zeichenpapier gebaut. Messungen des Sättigungsstromes einer und derselben Strahlung in Kondensatoren von verschiedener Länge und Querschnitt stimmen bei Reduktion auf gleiche absorbierte Energie nicht völlig überein, da der in dem Gasraum nicht absorbierte Anteil der verschiedenen Sekundärstrahlungen von den Dimensionen des Kondensators abhängt (Barkla-Philpot[2])).

Für die elektrische Messung der Ionisierungsströme in Gasen sind verschiedene Verfahren ausgebildet worden:

a) Galvanometrisch: An der einen Kondensatorplatte liegt der eine Pol einer Hochspannungsbatterie, deren anderer Pol geerdet ist. Den entstehenden Ionisierungsstrom läßt man durch ein hochempfindliches Drehspulen- oder Nadelgalvanometer zur Erde abfließen. Das Verfahren ist anwendbar bis auf Ströme von etwa 10^{-10} Amp. Bei noch kleineren Strömen ist es zweckmäßiger mit dem Ionisierungsstrom während einiger Minuten eine große Kapazität C aufzuladen. Nach Aufhebung der Verbindung von C mit der Ionisationskammer wird die Entladungsstromstärke von C mit einem ballistischen Galvanometer gemessen.

b) Elektrometrisch: Die eine Kondensatorplatte ist geerdet, die andere ist mit den Blättchen eines geladenen Elektroskops verbunden, dessen Entladungsgeschwindigkeit gemessen wird durch Abstoppen der Zeitdauer der Wanderung des Blättchens zwischen zwei festen Skalenpunkten oder durch Abzählen der in einer gewissen Zeit zurückgelegten Skalenteile. Das letztere Verfahren liefert etwas weniger genaue Vergleichswerte, da die Stellung des Blättchens die Kapazität des isolierten Systems beeinflußt. An Stelle des Elektroskops wird häufig auch ein Quadrantelektrometer mit Hilfsladung der Nadel benützt. Die Schaltung ist aus Fig. 2 ersichtlich. Erforderlich ist eine gute Dämpfung der Nadel, damit der Zustand gleichförmiger Bewegung möglichst bald nach dem Einschalten erreicht wird. Die untere Grenze der Empfindlichkeit

Gasvolumen, A = Ionenzahl, welche hervorgebracht wird durch die Strahlen mit der Intensität 1 beim Zurücklegen des Weges 1 im Gas. Wird die ganze Strahlungsenergie in dem Gasvolumen absorbiert, so ist also die erzeugte Ionenzahl

$$Q = \frac{A J_0}{\mu} \quad . \qquad \text{(II)}$$

Werden nun zwei homogene, verschieden harte, aber gleich intensive Strahlungen (Intensität J_0, Absorptionskoeffizienten μ_1 bzw. μ_2) in dem Gasvolumen völlig absorbiert, so verhält sich die Zahl der erzeugten Ionen

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad , \qquad \text{(III)}$$

wenn A als eine vom Härtegrad unabhängige Konstante angenommen würde. Aus der Gleichung (III) würde sich dann ergeben, daß bei gleicher absorbierter Energie die härtere Strahlung eine größere Ionisationswirkung hervorruft als die weiche Strahlung. Die Gleichung (III) kann nun mit dem auf Seite 307 aufgestellten Grundgesetz der Ionisationsmessungen in Übereinstimmung gebracht werden durch den Ansatz

$$A_1 = c_1 \mu_1 \text{ und } A_2 = c_2 \mu_2 \qquad \text{(IV)}$$

wobei

$$c_1 = f(\lambda_1) \text{ und } c_2 = f(\lambda_2)$$

ist. Dann ist im Falle völliger Absorption

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad . \qquad \text{(V)}$$

Es wäre von größtem Interesse, experimentell zu entscheiden, ob etwa $\frac{Q_1}{Q_2} = 1$ ist, d. h. ob bei gleicher absorbierter Energie Strahlen verschiedener Wellenlänge eine gleiche Anzahl Ionen bilden. Nach der obigen Betrachtung über den Mechanismus der Ionisation wäre zu erwarten

$$\frac{c_1}{c_2} > 1$$

wenn $\mu_1 < \mu_2$ ist, zutreffenden Falles müßte die Gleichung (6) ersetzt werden durch folgende Gleichung

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\mu_1 \mathfrak{F}_1 c_1}{\mu_2 \mathfrak{F}_2 c_2} \quad . \qquad \text{(VI)}$$

1) Ann. d. Phys. **38**, 781, 1912.
2) Phil. Mag. **25**, 832, 1913.

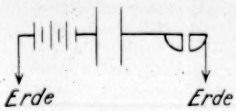


Fig. 2.

dieses Verfahrens beträgt etwa 10^{-15} Amp. Aus der Potentialänderung V des mit der Ionisationskammer verbundenen Quadranten in der Zeit t (sec) und aus der Kapazität C (in cm) des Elektrometers samt Zuleitungen berechnet sich der Strom i in Amp. aus der Gleichung

$$i = \frac{c \cdot V}{9 \cdot 10^{11} \cdot t}. \qquad (7)$$

c) Methode des konstanten Ausschlags: Ist w (Fig. 3) ein sehr großer Widerstand, welcher beim Stromdurchgang dem Ohmschen Gesetz gehorcht, so ist die elektrometrisch gemessene Spannungsdifferenz an seinen Enden

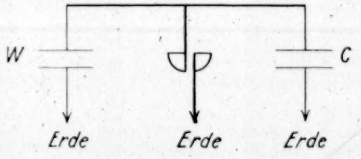


Fig. 3.

dem Ionisierungsstrom direkt proportional. Es ist schwierig einen handlichen Widerstand von der erforderlichen Größe (etwa 10^9 Ohm) herzustellen, welcher einen zeitlich konstanten und von geringen Temperaturänderungen unabhängigen Wert besitzen soll. Von dem Hauptnachteil der üblichen Flüssigkeitswiderstände (Jodkadmium-Amylalkohollösung, Borsäure-Mannitlösung) nämlich Änderung der Leitfähigkeit während des Stromdurchganges infolge Polarisation, scheint die von Campbell[1]) angegebene Xylol-Alkoholmischung (10:1) frei zu sein. Dieser Widerstand gehorcht dem Ohmschen Gesetz in sehr weiten Grenzen (von 0,01 Volt bis 400 Volt Spannung an seinen Enden). Wenig günstig ist jedoch der große Temperaturkoeffizient (1,4 Proz. für 1°. Bronson[2]) empfiehlt als Widerstand eine ionisierte Luftstrecke, die dadurch hergestellt wird, daß eine geringe Menge eines radioaktiven Salzes auf der einen Platte eines Kondensators verdampft wird. Zwecks Herabsetzung der Kontaktpotentialdifferenz werden beide Kondensatorplatten mit Aluminiumfolie bedeckt.

1) Phil. Mag. **22**, 301, 1911; **23**, 688, 1912.
2) Amer. Journ. Sc. **19**, 185, 1905.

d) Kompensationsmethoden: Das Elektrometer dient als Nullinstrument; dem mit der Ionisationskammer verbundenen Quadranten wird eine entsprechend bemessene Elektrizitätsmenge entgegengesetzten Vorzeichens mit Hilfe des Harmschen Kondensators[1]) oder des Curieschen Piezoquarzes[2]) zugeführt. Eine von Seemann[3]) benützte Kompensationsmethode ist aus Fig. 4 ersichtlich. Durch Änderung des Widerstandes

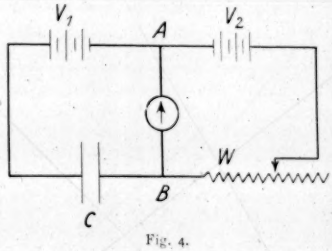


Fig. 4.

w wird erreicht, daß die Potentialdifferenz $AB = 0$ ist; dann ist der gesuchte Ionisierungsstrom $i = \frac{V_2}{w}$. Noch einfacher gestaltet sich die Messung, wenn der Flüssigkeitswiderstand w konstant gehalten und V_2 variiert wird, da die Messung von V_2 mit einem gewöhnlichen Voltmeter erfolgen kann. Empfindlichkeitsgrenze bei etwa 10^{-16} Amp. Der Vorteil der Kompensationsmethoden besteht darin, daß eine Kenntnis der Kapazität des Systems nicht erforderlich ist und daß der Einfluß von etwaigen Isolationsfehlern des Elektrometers auf ein Minimum reduziert wird, weil das Elektrometerpotential von 0 wenig verschieden ist.

Im Gegensatz zu den üblichen Ionisationsmessungen, bei denen die Sättigungsstromstärke von der Intensität und von der Härte der Strahlen abhängt, liefert das von Christen[4]) konstruierte Iontoquantimeter direkt die Angabe der Flächenenergie bzw. Intensität der Strahlung unabhängig von deren Härtegrad. Auf der Ionisationskammer sitzt ein Absorptionskörper (in Form eines Rotationsparaboloides oder eines Keiles), dessen Dimensionen so berechnet sind, daß die Strahlen verschiedener Härte in solchem Maße durch Absorption geschwächt werden, daß ihre relative Ionisationswirkungen bezogen auf gleiche auffallende Intensitäten in dem Gas gleich groß werden. Z. B. können die

1) Diese Zeitschr. **5**, 47, 1904.
2) Journ. d. Phys. **8**, 149, 1889.
3) l. c.
4) Diese Zeitschr. **16**, 362, 1915; **18**, 165, 1917.

weichen Strahlen, welche bei gleicher Energie eine relativ größere Ionisationswirkung besitzen, hauptsächlich nur durch die dünnen Teile des Absorptionskörpers in die Ionisationskammer eindringen, so daß sie nur ein kleineres Gebiet des Gasraums zu ionisieren vermögen als die harten Strahlen. Über die praktische Verwendbarkeit dieser Methode ist bisher noch nichts Näheres bekannt geworden.

2. Sekundäre Elektronenemission.

Die sekundäre Elektronenemission einer von Röntgenstrahlen getroffenen Metallplatte bildet die Grundlage einer zuerst von Holtsmark[1]) angewandten Methode der Intensitätsmesssung von Röntgenstrahlen. Zur Vermeidung von Elektrizitätsverlusten infolge Ionisation des umgebenden Gases wurde die Platte in einem evakuierten Glaszylinder angebracht. Durch Abgabe von Elektronen bei der Bestrahlung beladet sich die Platte mit positiver Elektrizität, welche durch einen sehr hohen Widerstand (von etwa 10^9 Ohm) zur Erde abgeleitet wird. Der elektrometrisch gemessene Strom ist proportional der Zahl der ausgelösten Elektronen. Bei Variierung der Fokusdistanz f wird diese Zahl proportional f^2 gefunden; darin erblickt Holtsmark den Beweis dafür, daß seine Methode wirklich die Intensität der Strahlung mißt. Seine Angabe, daß bei einer bestimmten Röhrenhärte der gemessene Effekt am größten ist, weist darauf hin, daß das Vorherrschen gewisser Wellenlängen in der untersuchten Röntgenstrahlung in besonders starker Weise die Auslösung sekundärer Elektronen hervorruft. Wie zahlreiche Arbeiten anderer Forscher ergeben haben, erreicht die Zahl der ausgelösten Elektronen ein selektives Maximum, wenn gerade solche Wellenlängen auftreffen, die die charakteristische Eigenstrahlung des Materials der Platte erregen. Darin liegt auch die Erklärung für die Beobachtung von Holtsmark, daß die nach seiner Methode vorgenommenen Absorptionsmessungen an verschiedenen Stoffen zu ganz anderen Resultaten führen wie die Benoistschen Ionisationsbestimmungen.

Zur Vergleichung der Intensitäten von Strahlengemischen ist die Methode somit nicht zu gebrauchen. An dieser Feststellung wird durch das Resultat Angerers[2]), daß die Elektrizitätsmenge Q der sekundären Elektronen proportional der bolometrisch gemessenen Strahlungsenergie E ist, nichts geändert, da die von Angerer benützten Strahlengemische infolge gleicher Betriebsweise nahezu dieselbe Zusammensetzung besaßen. Aus seinen Figuren geht übrigens deutlich hervor, daß die Gerade $Q = aE$ bei einer harten Röhre eine etwas andere Neigung a besitzt als bei einer sehr weichen Röhre. Die Anwendbarkeit der Methode beschränkt sich also auf relative Intensitätsmessungen von homogenen Strahlen gleicher Durchdringungsfähigkeit oder von Strahlengemischen gleicher spektraler Zusammensetzung. Für eine Ausdehnung der Methode auf die Ermittlung der Intensitäten J von homogenen Strahlen verschiedener Durchdringungsfähigkeit ist die Kenntnis der Wellenlängenabhängigkeit des Emissionskoeffizienten[1]) K der sekundären Elektronenemission erforderlich. Die Zahl der ausgelösten Elektronen Q ist proportional mit $\frac{K}{\mu + r} \cdot J$ (μ Absorptionskoeffizient oder Röntgenstrahlen, r Absorptionskoeffizient der Kathodenstrahlen in dem Material der Platte). μ darf gegenüber von r vernachlässigt werden. Die relativen Intensitäten J_1 und J_2 von homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Härte (μ_1 und μ_2) berechnen sich somit aus den beobachteten Elektronenzahlen Q_1 und Q_2 nach der Gleichung

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{K_1 r_2 J_1}{r_1 K_2 J_2} \quad (8)$$

Voraussetzung ist dabei, daß die Platte in bezug auf das Durchdringungsvermögen der Kathodenstrahlen als ∞ dick angesehen werden darf.

3. Leitfähigkeitsänderung des Selens.

Die ersten quantitativen Versuche über die Einwirkung der Röntgenstrahlen auf die Leitfähigkeit dünner Selenschichten wurden von Athanasiadis[2]) angestellt. Es ergab sich für die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung von der Strahlungsintensität die gleiche Beziehung wie bei Belichtung mit optisch sichtbarem Licht. Durch Fürstenau wurde die Selenzelle in die medizinische Meßtechnik eingeführt. Bei dem Fürstenauschen Intensimeter bildet die Selenzelle den Zweig einer Wheatstoneschen Brücke. In die Diagonalleitung ist ein Milliamperemeter eingeschaltet, dessen Zeigerausschlag der Leitfähigkeitsänderung und damit der Strahlungsintensität (bei gleichbleibender Qualität der Strahlung) proportional ist. Bei einer Beurteilung dieses Meßverfahrens sind folgende Punkte zu berücksichtigen:

a) Zeitliche Inkonstanz des Dunkelleitwertes und der Empfindlichkeit.

1) Ann. d. Phys. **10**, 522, 1903.
2) Ann. d. Phys. **21**, 87, 1906.

1) Einige wenige Zahlenwerte bei Sadler, Phil. Mag. **27**, 447, 1911.
2) Ann. d. Phys. **27**, 890, 1908.

b) Trägheit und Ermüdung der Zellen.
c) Einfluß von Temperatur und Feuchtigkeit.
d) Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung von der Wellenlänge der auffallenden Strahlen.

a) Eine Änderung des Widerstandes einer unbelichteten Selenzelle (Dunkelleitwert) tritt bei allen Zellen unmittelbar nach der Herstellung auf und nähert sich im Laufe von Tagen bei den normalen Zellen einem gewissen konstanten Wert, während bei den anormalen Zellen fortwährende zufällige Schwankungen auftreten, welche nach den Untersuchungen von Ries[1]) hauptsächlich durch den wechselnden Feuchtigkeitsgehalt der Luft veranlaßt werden. Fürstenau[2]) hat in einer kürzlich erschienenen Arbeit auf Grund zahlreicher Versuche an Selenzellen verschiedener Herstellungsweise nachgewiesen, daß bei einer bestimmten Herstellungsart stets normale Zellen erhalten werden können. Auch die Empfindlichkeit, d. h. die prozentuale Änderung des Dunkelwiderstandes beim Auffallen einer gewissen gleich großen Strahlungsintensität bleibt bei den normalen Zellen zeitlich konstant, sobald sie etwas gealtert sind.

b) Wie die Fig. 5 zeigt, stellt sich nicht sogleich mit dem Einsetzen der Strahlung ein konstanter Wert des Widerstandes ein. Die Zeit, die zur Erreichung des stationären Zustandes erforderlich ist, ist verschieden groß, je nach

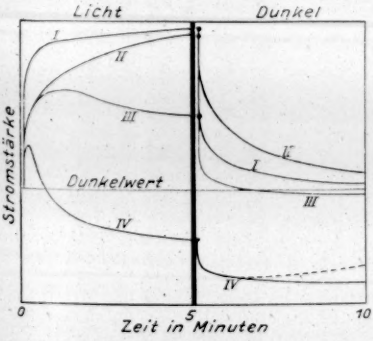


Fig. 5. (Nach Ries.)

der Herstellungsweise der Zellen (Größe der Erhitzungstemperatur, langsame oder rasche Abkühlung). Trägheit und Ermüdung d. h. allmähliche Abnahme der Leitfähigkeit bei gleichbleibender Intensität, sind im allgemeinen komplementäre Eigenschaften, insofern Zellen mit geringer Trägheit (Kurve I, Fig. 5) rasche Ermüdung zeigen und umgekehrt (Kurve II, Fig. 5). Das Ermüdungsstadium tritt um so schneller ein, je größer die Strahlungsintensität ist. Als Beispiel für die Größe der Trägheit mag die Angabe Fürstenaus dienen, daß bei seinen Zellen mit geringer Trägheit der stationäre Zustand 3 bis 10 Sekunden nach Einsetzen der Strahlung auftritt. Aus der Fig. 5 ist ersichtlich, daß nach Aufhören der Strahlung eine für jede Zelle individuelle Zeit verstreicht, bis der Wert des Dunkelwiderstandes erreicht wird. Die Kurve III der Fig. 5 gibt ein Bild von dem Verhalten einer anormalen Zelle bei und nach der Belichtung. Im Gegensatz zu Glatzel[1]), welcher bei intermittierender Belichtung bei gleicher Intensität verschiedene Leitfähigkeitswerte erhielt, je nachdem die Stärke der Strahlung im Zunehmen oder Abnehmen begriffen war, findet Fürstenau an seinen Zellen keine Abhängigkeit der bei Bestrahlung auftretenden Leitfähigkeitsänderung von der Vorgeschichte der Zellen. Bei wiederholten, in kurzen Zeiträumen sich folgenden Bestrahlungen nimmt zwar die Verdunkelungsträgheit zu, aber der bei gleicher Stärke der Strahlung erreichte Widerstandswert bleibt konstant, und zwar ganz unabhängig davon, ob das Wiedereinsetzen der Strahlung schon zu einer Zeit erfolgt, wo der Wert des Dunkelwiderstands noch nicht völlig erreicht war. Damit ist der Haupteinwand gegen die Verwendung der Selenzelle zur Strahlungsmessung hinfällig geworden.

c) Bei den Zellen normalen Verhaltens ist nach Ries der Einfluß des Feuchtigkeitsgehalts der Luft sehr gering, während er bei den anormalen Zellen sehr groß ist. Wie oben erwähnt, scheint außer etwaigen molekularen Umlagerungen der Hauptgrund für die unregelmäßigen Schwankungen der als anormal bezeichneten Zellen in dem Einfluß der Luftfeuchtigkeit zu liegen. Eingehende Untersuchungen über den Temperaturkoeffizienten von Selenzellen liegen nicht vor. Bei Umhüllung der Selenzellen mit Stoffen, welche die Wärme schlecht leiten und andrerseits die Röntgenstrahlen leicht durchlassen, kann aber für alle praktischen Meßzwecke der Temperatureinfluß vernachlässigt werden.

d) Bei einer Betrachtung der Wirkung verschieden harter Strahlen auf die Leitfähigkeitsänderung einer Selenschicht sind zwei Möglichkeiten denkbar: Der beobachtete Seleneffekt ist entweder proportional der auf ein Volumelement des Selens auffallenden oder proportional der in einem Volumelement absorbierten Strahlungsintensität. Wenngleich die letztere Annahme

1) Diese Zeitschr. **12**, 480, 1911.
2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgstr. XXIV, 390, 1917.

1) Verh. d. Phys. Ges. **14**, 607, 1912.

aus energetischen Gründen als die wahrscheinlichere erscheint, so kann eine Entscheidung der Frage nur auf experimentellem Wege erhalten werden, zumal da die theoretischen Vorstellungen über die bei der Bestrahlung im Selen auftretenden Vorgänge noch nicht genügend geklärt sind (chemische Auffassung von Hesehus[1]), elektronentheoretische Erklärung von Ries[2]). Die experimentelle Ermittlung der Beziehung zwischen Leitfähigkeitsänderung und Intensität muß für homogene Strahlen verschiedener Wellenlänge (z. B. Eigenstrahlung von Metallen) durchgeführt werden, indem die Intensität gleichzeitig mit einer anderen Methode (z. B. Ionisationsmessung, Korrektion gemäß Gleichung 6) gemessen wird. Solange dies nicht geschehen ist, fehlt die exakte Grundlage zu einer quantitativen Intensitätsbestimmung mittelst des Seleneffektes, sofern man sich nicht auf den einfachsten Fall einer Intensitätsvergleichung von homogenen Strahlungen gleicher Durchdringungsfähigkeit oder von Strahlengemischen mit gleicher spektraler Zusammensetzung beschränkt.

3. Gruppe: Messung der chemischen Wirkungen.

1. Die Schwärzung der photographischen Emulsion.

Die ersten quantitativen Versuche über die Schwärzungswirkung der Röntgenstrahlen auf Bromsilberemulsion stammen von Precht[3]). Bei Änderung der Fokusdistanz f und der Expositionszeit t entstehen gleich starke Schwärzungen, wenn $f^2 \cdot t = \text{const}$ ist, d. h. wenn $J \cdot t = \text{const}$ ist (J Strahlungsintensität). Zum gleichen Resultat gelangt Kröncke[4]), welcher die Strahlungsintensität J durch Änderung der Sekundärstromstärke i variiert. Die Proportionalität der Größen J und i ergibt sich aus dem Versuchsresultat, daß bei einer mit konstanter Gleichspannung betriebenen Röntgenröhre die Ionisationswirkung proportional i ist. Wegen der Konstanz der Spannung besitzen die betreffenden Strahlengemische gleiche Zusammensetzung, so daß die Ionisationswirkung ohne Bedenken als direktes Maß der relativen Strahlungsintensitäten betrachtet werden darf. Kröncke schließt aus seinen Versuchen, bei denen der Wert des Produktes $J \cdot t$ allerdings nur in dem kleinen Intervall 1 : 4 variiert wurde, daß die Konstante p in dem Schwarzschildschen Gesetz $J \cdot t^p$ für die Schleußner-Röntgenplatten zwischen 0,96 und 1,0 liegen muß, so daß das Bunsen-Roscoesche Gesetz „gleiche photochemische Wirkungen entsprechen gleicher Strahlungsenergie" für die benützte Plattensorte bei Belichtung mit Röntgenstrahlen gültig ist. Aus den Versuchsbedingungen ergibt sich als weitere Voraussetzung, daß die Qualität der Strahlung bei der Variation von J und t konstant bleibt.

Eine Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen durch Photometrieren der Schwärzungen ist nur bei homogenen Strahlungen statthaft: Nach Abzug der Schleierschwärzung wird der Zusammenhang zwischen der Intensität J und der in absolutem Maß ausgedrückten Schwärzung S durch eine gerade Linie angenähert dargestellt, wie die Versuche von Koch und Friedrich[1]) an den Eigenstrahlungen von *Fe*, *Zn*, *Sn*, *Pb* ergeben haben. Die Intensitäten wurden hierbei in dem Verhältnis 1 : 100 variiert. Das Talbotsche Gesetz wurde auch bei Röntgenstrahlen gültig gefunden.

Die Kenntnisse über die Abhängigkeit der Schwärzungsgesetze von der Wellenlänge der betreffenden homogenen Strahlung sind bisher nur qualitativer Natur. Bei gleicher Intensität ist im allgemeinen die erzeugte Schwärzung umso größer, je weicher die Strahlen sind, weil ein entsprechend größerer Bruchteil der Strahlungsenergie in der photographischen Schicht absorbiert wird. Wie die Spektralaufnahmen von Wagner[2]) zeigen, besitzt die Bromsilberemulsion eine erheblich gesteigerte Sensibilität gegenüber von Wellenlängen, die kleiner sind als $\lambda_A = 0{,}49 \cdot 10^{-8}$ cm. Hier setzt der Anstieg der Sensibilität sprunghaft ein, um nach der kurzwelligen Seite des Spektrums allmählich wieder abzunehmen. Diese plötzliche Steigerung der Empfindlichkeit erfolgt nicht bloß auf Rechnung erhöhter Absorption (λ^A ist die Wellenlänge der Absorptionsbandkante des Silbers), sondern hauptsächlich auf Rechnung der bei dieser Wellenlänge mit maximaler Intensität einsetzenden Eigenstrahlung der Silberatome, so daß die Schwärzungswirkung als eine Summation der direkten Wirkung der Primärintensität und des in Sekundärstrahlung verwandelten Bruchteils der Primärintensität anzusehen ist. Es ist daher fraglich, ob der von Koch und Friedrich gefundene geradlinige Verlauf der Schwärzungskurven auch in diesem kritischen Gebiet bestehen bleibt. Als geeignete Strahlung zur experimentellen Entscheidung dieser Frage käme vor allem die Eigenstrahlung des Antimons in Betracht.

Ein zweites Gebiet selektiver Sensibilität, der Eigenstrahlung des Broms entsprechend

1) Diese Zeitschr. **7**, 163, 1906.
2) l. c.
3) Diese Zeitschr. **1**, 48, 1899.
4) Ann. d. Phys. **43**, 687, 1914.

1) Ann. d. Phys. **45**, 399, 1914.
2) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915.

($\lambda_A = 0{,}926 \cdot 10^{-8}$ cm) tritt weniger stark in Erscheinung, da es sich hier um sehr weiche Strahlen handelt, welche schon in der Glaswand der Röntgenröhre etwa zur Hälfte absorbiert werden.

Mit dem Zusammenhang zwischen Schwärzungswirkung und Ionisationswirkung bei homogenen Röntgenstrahlen verschiedener Härte befaßt sich eine Untersuchung von Barkla und Martyn[1]). Die Exposition der photographischen Platte dauerte bei jeder Strahlengattung solange, bis die Ladung eines Elektroskopes um einen gewissen konstanten Betrag abgenommen hatte. Die Tabelle I enthält die Wellenlänge λ der Strahlen[2]), die relativen Schwärzungswerte S bei gleicher Ionisationswirkung und die hieraus relativ berechneten relativen Schwärzungswerte S', bezogen auf gleiche auffallende Intensität der Strahlen.

Tabelle I.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$ cm	S	S'
Cu	1,5	1,73	82
Zn	1,4	1,67	65
Br	1,0	1,75	28,6
Mo	0,71	2,25	11,9
Ag	0,56	2,25	5,6
Sn	0,49	2,75	4,8
Sb	0,47	4,22	5,1
J	0,44	4,62	4,25
Ce	0,36	4,67	2,8

In der Spalte S tritt der oben besprochene Sensibilitätsanstieg infolge Erregung der *Br*- bzw. *Ag*-Strahlung deutlich hervor. Infolgedessen müssen die in der medizinischen Dosimetrie so beliebten Intensitätsmessungen von Strahlengemischen auf Grund der Schwärzungswirkung zu sehr erheblichen Fehlresultaten führen, und zwar um so mehr, je größer der Anteil an sehr harten Strahlungskomponenten ist.

2. Erregung von Fluoreszenzlicht.

Die am längsten bekannte Wirkung der Röntgenstrahlen, die Erregung von Fluoreszenzlicht bei zahlreichen chemischen Stoffen, ist durch systematische Untersuchungen noch recht wenig geklärt worden, so daß sie für eine quantitative Messung der Strahlungsintensität nicht benützt werden kann. Für eine schätzungsweise Vergleichung von Intensitäten ist jedoch die Beurteilung der Helligkeit des Aufleuchtens eines Fluoreszenzschirmes sehr gut geeignet. Eine quantitative Ausgestaltung der fluorometrischen Methoden ist nur unter folgenden Bedingungen möglich:

a) Der fluoreszierende Stoff darf nicht nachleuchten,

b) die Stärke des Fluoreszenzlichtes muß unter sonst gleichen Umständen zeitlich konstant bleiben (keine Fluoreszenzermüdung),

c) der Umsetzungskoeffizient der Strahlungsenergie in Energie des Fluoreszenzlichtes muß als Funktion der Wellenlängen der auffallenden Röntgenstrahlen bekannt sein,

d) die spektrale Zusammensetzung des Fluoreszenzlichtes eines und desselben Stoffes muß unabhängig sein von der Qualität der erregenden Röntgenstrahlung.

Die Notwendigkeit der Voraussetzung d) wird durch die physiologischen Verhältnisse des menschlichen Auges bedingt. (Abhängigkeit der Sensibilität von der Wellenlänge des Lichtes.)

Ein Vorschlag von Rutherford und Mc. Clung[1]) die absolute Energie einer Röntgenstrahlung durch die Helligkeit eines Fluoreszenzschirms zu messen, verdient historisches Interesse: Durch eine bolometrische Messung der Röntgenstrahlenenergie und eine Vergleichung der Fluoreszenzhelligkeit mit einer Lichtquelle von bekanntem Energiewert ergibt sich der Umsetzungskoeffizient zu 0,037. Zur Berechnung der absoluten Strahlungsenergie E läßt sich sodann folgende Gleichung aufstellen:

$$E = 0{,}082 \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 \cdot A} \text{ cal.} \qquad (9)$$

r_1 und r_2 Abstand des Leuchtschirms und der Normallichtquelle vom Photometerwürfel; A ist der im Leuchtschirm absorbierte Bruchteil der Strahlung.

Eine Ausdehnung dieses Verfahrens auf beliebige Röntgenstrahlengemische ist unstatthaft, da die Konstante 0,082 von der spektralen Zusammensetzung der Röntgenstrahlung abhängt.

3. Verfärbungserscheinungen.

Bei lang dauernden Bestrahlungen erleiden manche Stoffe eine Änderung ihrer Farbe, welche zumeist durch die Wirkung des Tageslichtes wieder rückgängig gemacht werden kann (Holzknecht[2])). Die grüne Farbe des Bariumplatinzyanürs geht z. B. allmählich bei der Bestrahlung in eine braungelbe Farbe über. Verwendung findet diese Methode in der medizinischen Dosimetrie (vgl. Kapitel IV). Für die Beurteilung der Fehlerquellen ist besonders zu beachten, daß nicht die auffallende, sondern die absorbierte Strahlungsenergie für den Grad der Farbänderung maßgebend ist. Wegen der selektiven Absorption des Bariums und des Platins reagiert

1) Phil. Mag. **25**, 299, 1913.
2) Wellenlänge des α-Dubletts der *K*-Serie.

1) Proc. Roy. Soc. **67**, 245, 1900.
2) Verh. d. D. Phys. Ges. **4**, 25, 1902.

die Tablette besonders stark auf die Wellenlängen in der Umgebung von $\lambda = 0{,}3 \cdot 10^{-8}$ und $\lambda = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ cm. Aus der Gleichheit der Verfärbung darf daher nur dann auf gleiche Energie der wirkenden Strahlungen geschlossen werden, wenn deren Spektren nahezu identisch sind.

4. Ausfällung von Salzen aus ihren Lösungen.

Werden z. B. Quecksilbersalze in wäßriger Lösung der Wirkung von Röntgenstrahlen ausgesetzt, so ist der beobachtete Niederschlag von Kalomel annähernd proportional der absorbierten Strahlungsenergie (Schwarz[1]). Bei größeren Niederschlagsmengen ist der Einfluß der dadurch hervorgerufenen Konzentrationsänderung zu berücksichtigen, so daß die exakten quantitativen Verhältnisse ziemlich kompliziert sind. Die von Freund[2]) vorgeschlagene Methode, die Ausscheidung von Jod in einer bestrahlten Jodoform-Chloroformlösung zur Energiemessung der Strahlung zu verwenden, hat sich nicht bewährt, da die Jodausscheidung in hohem Grade von einem etwaigen Wassergehalt der Lösung abhängt (Wertheim-Salomonson). An Stelle der Wägung des Niederschlages wird in der Praxis meist die Trübung der Lösung durch Vergleichung mit empirisch hergestellten Trübungsskalen angewandt.

4. Gruppe: Indirekte Intensitätsmessungen.

Die in der Praxis weit verbreitete Gewohnheit, die Stärke des durch die Röntgenröhre fließenden Stromes als ein von der Betriebsweise und dem Vakuum der Röhre unabhängiges Maß der Strahlungsintensität zu benutzen, stützt sich auf die Anschauung, daß 1) die Röntgenstrahlenintensität proportional der auf die Antikathode auftreffenden Elektronenzahl sei und daß 2) diese Anzahl durch die Sekundärstromstärke gemessen werde. Zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches dieses Satzes ist eine experimentelle Prüfung dieser beiden genannten Voraussetzungen erforderlich:

1. Aus dem Versuchsergebnis von Carter[3]), daß der Nutzeffekt zwischen Kathodenstrahlenenergie E_K und Röntgenstrahlenenergie E_R eine lineare Funktion der an der Röhre liegenden Spannung V ist, nämlich

$$\frac{E_R}{E_K} = aV \quad (a \text{ eine Konstante}), \qquad (10)$$

folgt, daß bei gleicher auf die Antikathode auftreffenden Elektronenzahl N die emittierte Röntgenstrahlenintensität proportional mit V^2 geht, da $E_K = NeV$ ist (e Elementarquantum).

2. Die Frage, ob der ganze vom Milliamperemeter angezeigte Strom durch den Elektronenschwarm transportiert wird oder nur ein Bruchteil p desselben und ob diese Größe p einen von dem Vakuum und der Betriebsweise unabhängigen Wert besitzt, hat noch keine allgemeine experimentelle Beantwortung gefunden.

Bei kontinuierlichem Gleichstrombetrieb ist nach den Versuchen von Kröncke[1]) p eine Konstante: Die Strahlungsintensität J ist, unabhängig vom Vakuum, direkt proportional der Stromstärke i, sofern die Spannung V gleich groß bleibt; wird V variiert, so ist J proportional iV^2, wie dies nach Gl. (10) zu erwarten ist. Gegen die Tatsache, daß Kröncke bei diesen Versuchen die gesuchte Strahlungsintensität der beobachteten Ionisationswirkung ohne weiteres gleichsetzte, wurde von Christen[2]) der Einwand erhoben, daß die Veränderung der Spannung eine entsprechende Änderung der Strahlungszusammensetzung bewirke und daß daher die Ionisationswirkung von Gemischen verschiedener Zusammensetzung herrühre, so daß sie nicht mehr als direktes Maß der Intensität angesehen werden dürfe (vgl. Seite 307). Dieser Einwand besteht zweifellos zu Recht. Wie die Spektraluntersuchungen von Duane und Hunt[3]) zeigen, dehnt sich mit wachsender Spannung das Spektrum der erzeugten Strahlen ständig weiter nach der kurzwelligen Seite aus. Wahrscheinlich ist aber dieser Einfluß bei Kröncke von der Größenordnung der Meßfehler, da auf einem ganz anderen Wege Whiddington[4]) zu dem gleichen Resultat E proportional V^2 gelangte.

Bei der üblichen Betriebsweise der Röhren mittels Induktors oder Gleichrichters wird eine Änderung der Belastung der Röhre durch eine Änderung der Sekundärspannung des Stromerzeugers bewirkt. Infolgedessen ändert sich auch die Spannung der Röhre, so daß wegen Gleichung (10) das Verhältnis der Stromstärken nicht mehr als exaktes Maß der Strahlungsintensitäten dienen kann, wenn ein- und dieselbe Röhre in gleicher Weise, aber mit verschiedener Sekundärstromstärke betrieben wird. Die Größe der Spannungsänderung mit der Belastung hängt vom Vakuum der Röhren ab und ist bei weichen Röhren größer als bei harten (Klingelfuß[5]).

Wennschon bei gleicher Betriebsweise die Verwendung des Milliamperemeters zur Messung

1) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **11**, 114, 1906.
2) Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **7**, 218.
3) Ann. d. Phys. **21**, 955, 1906.

1) Ann. d. Phys. **43**, 687, 1914.
2) Diese Zeitschr. **17**, 23, 1916.
3) Phys. Rev. **6**, 166, 1915.
4) Proc. Roy. Soc. **85**, 99, 1911.
5) Verh. d. D. Röntgen-Ges. **5**, 62; vgl. hierzu Ludewig, diese Zeitschr. **16**, 428, 1915.

der Strahlungsintensität nur unter den besprochenen Einschränkungen statthaft ist, so ist es ganz unzulässig, auf Grund der Sekundärstromstärke Intensitätsvergleiche anzustellen, wenn die Art der Strahlungserzeugung eine verschiedene ist (Gleichrichter, Induktor, rotierender Quecksilberunterbrecher, elektrolytischer Unterbrecher usf.).

Selbst in dem Falle einer Gleichheit der mittleren Spannung bei beiden Betriebsarten kann nämlich nicht erwartet werden, daß der Quotient des Mittelwertes der Stromstärken genau gleich dem Quotienten der Strahlungsintensitäten ist, da wegen der Verschiedenheit des zeitlichen Spannungsverlaufes während eines Induktionsstoßes die dynamische Charakteristik ein und derselben Röhre verschiedene Form annimmt. Dabei ist noch eine praktisch wichtige Fehlerquelle zu beachten, nämlich die Fälschung der Angaben des Milliamperemeters durch die verschiedene Größe eines etwaigen Schließungsstromes.

Eine eindeutige Bestimmung der Strahlungsintensität durch Messung der Stromstärke allein ist somit nur möglich bei Verwendung einer konstanten Gleichspannung. In allen übrigen Fällen muß die Spannungsmessung ergänzend hinzutreten. Aus seinen Versuchen mit kontinuierlichem Gleichstrom hat Kröncke folgende Gleichung als Grundlage einer indirekten Intensitätsmessung J abgeleitet:

$$J = i\,(b_1 V^2 - b_2). \qquad (11)$$

V Spannung, i Stromstärke, b_1 und b_2 sind zwei für die Röhre charakteristische Konstanten.

Bei einer Übertragung dieser Beziehung auf die übliche technische Betriebsweise mit intermittierendem Gleichstrom sind für i und V Mittelwerte einzusetzen, deren experimentelle Bestimmung zurzeit noch nicht in einwandfreier Weise vorgenommen werden kann, da i und V in einem vom Vakuum und der Betriebsweise abhängigen funktionellen Zusammenhang[1]) stehen.

Die Strahlungsausbeute hängt außerdem, unter gleichen elektrischen Verhältnissen, von der Beschaffenheit der Röntgenröhre ab (Verschiedenheit des Absorptionsverlustes in der Glaswandung der Röhre, Abhängigkeit des Faktors a in Gleichung (10) vom Antikathodenmaterial[1])).

1) Theoretische Ableitung der dynamischen Charakteristiken bei Ludewig, diese Zeitschr. **16**, 438, 1915.

Bei einer zusammenfassenden Beurteilung der zahlreichen Intensitätsmeßmethoden hat man vier Aufgaben der Intensitätsmessung zu unterscheiden.

1. Relative Intensitätsmessungen an homogenen Strahlen gleicher Wellenlänge oder an Strahlengemischen gleicher spektraler Zusammensetzung.

2. Relative Intensitätsmessungen an homogenen Strahlen verschiedener Wellenlänge.

3. Relative Intensitätsmessungen an Strahlengemischen verschiedener Zusammensetzung.

4. Absolute Intensitätsmessungen an homogenen oder heterogenen Strahlungen.

1. Jede Methode, für welche einmal der Zusammenhang zwischen beobachteter Strahlungswirkung und Intensität empirisch ermittelt ist (z. B. durch Variation der Fokusdistanz) ist hierfür geeignet.

2. In Betracht kommen diejenigen Verfahren, deren Angaben entweder ganz von der Härte der Strahlen unabhängig sind, (siehe 3) oder deren Meßresultate zu derselben in einfacher und bekannter Beziehung stehen, z. B. die Ionisationsmethoden.

3. Der hier notwendigen Bedingung der Härteunabhängigkeit genügen nur die auf der Wärmewirkung beruhenden Methoden sowie das Integraliontometer.

4. Mit Ausnahme des letzteren eignen sich diese Verfahren auch zu einer absoluten Energiebestimmung der Strahlungsenergie in $\frac{\text{cal}}{\text{qcm sec}}$.

Obgleich theoretisch den Wärmemethoden das größte Anwendungsgebiet zukommen würde, so ist leider ihre praktische Verwendbarkeit durch ihre geringe Empfindlichkeit sehr beschränkt. Quantitative Bestimmungen sehr geringer Strahlungsintensitäten sind nur mit Hilfe der Ionisationsmethoden durchführbar.

1) Carter l. c.

(Schluß folgt.)

BESPRECHUNGEN.

D. Reichinstein, Die Eigenschaften des Adsorptionsvolumens. gr. 8°. VI u. 116 S. Zürich und Leipzig. Gebr. Leemann & Co. 1916. M. 5.—.

Nachdem der Verf. in der Einleitung eine Reihe von Fällen aus dem Gebiet der heterogenen Systeme besprochen, bei denen das chemische Massenwirkungsgesetz versagt, stellt er eine neue Theorie auf. Nach derselben sollen die hierhin gehörigen Vorgänge sich nicht in der mathematischen (?) Fläche zwischen den beiden Phasen, sondern innerhalb der festen Phase, und

zwar in einer relativ kleinen Entfernung von der Phasengrenze abspielen. In diesem Reaktionsraum, dem sogenannten Adsorptionsvolumen, soll sich eine feste Lösung, bestehend aus dem Elektrodenmaterial, Gas und den Bestandteilen der flüssigen Phase ausbilden; abweichend von dem Verhalten der gewöhnlichen Lösungen soll hier die Summe der aktiven Massen stets konstant bleiben und infolgedessen ein neu hinzukommender Stoff die Konzentration der übrigen Stoffe verkleinern. In welcher Weise der Verf. auf Grund dieser Theorie die Eigenschaften der Depolisatoren, die Passivität, Adsorption usw. erklärt, muß im Original nachgelesen werden, zumal da keine exakte Ausarbeitung der in Betracht kommenden Gleichungen gegeben wird. G. C. Schmidt.

A. Gutzmer, Die Tätigkeit des deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1908 bis 1916. gr. 8°. 27 S. Leipzig u. Berlin. B. G. Teubner. 1917. M. 1.—.

Anläßlich der Fertigstellung der „Abhandlungen" berichtet der Verfasser über die Vorgeschichte und Einsetzung der „Imuk", dann über die Arbeit des deutschen Unterausschusses und schließt mit einem Rückblick und Ausblick auf das weitere Wirken nach dem Kriege. Das, was geleistet ist, berechtigt zu der Hoffnung, daß auch in Zukunft Deutschland auf dem Gebiete des Unterrichtswesens in vorderster Linie stehen wird. Die Arbeit des deutschen Unterausschusses ist außerordentlich vielseitig und umfassend. Sie hat dem mathematischen Elementar- und Hochschulunterricht neue Wege gewiesen und neue Ziele gesteckt, die auch für den physikalischen Unterricht von wesentlicher Bedeutung sind, indem sie überall die Fäden aufzudecken sucht, welche die verschiedenen Unterrichtsweisen miteinander verknüpfen, und den Zusammenhängen mit den Naturwissenschaften, der Technik, der Philosophie usw. nachgeht. Der Physiker wird auch aus den Abhandlungen über angewandte Mathematik und über Lehrerbildung wertvolle Anregung schöpfen. Götting.

F. Kohlrausch und L. Holborn, Das Leitvermögen der Elektrolyte, insbesondere der wässerigen Lösungen. Methoedn, Resultate und chemische Anwendungen. Zweite vermehrte Auflage. XV. u. 237 S. mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1916. Geh. M. 7.50, geb. M. 8.50.

Das Erscheinen der neuen Auflage bedarf an dieser Stelle lediglich der Erwähnung. Die in ihrer Art klassische Monographie bildet für jeden, der die Messung von Elektrolyt-Leitfähigkeiten zu einem der zahlreichen Zwecke, für welche sie in Betracht kommt, benutzt, eine notwendige Ergänzung zu Kohlrauschs praktischer Physik. Die Darstellung der Methode erforderte gegenüber der ersten Auflage keine wesentliche Änderung; die Ergänzung und kritische Sichtung der Angaben ist von Holborn bis in die neueste Zeit geführt worden. A. Coehn.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Dr. A. F. Westgren zum Dozenten für physikalische Chemie an der Universität Upsala.

Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wolfgang Gaede zum ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Berlin, der ord. Professor der Geophysik an der Universität Leipzig Dr. Vilhelm Bjerknes in gleicher Eigenschaft an die neue Universität Bergen (Norwegen).

Verliehen: Dem Privatdozenten für reine Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Leon Lichtenstein der Titel Professor.

Gestorben: Der Kustos der bayrischen Erdmessungskommission Dr. Ernst Zapp (als Leutnant und Kompagnieführer einer Maschinengewehrabteilung gefallen), der Direktor des Preußischen Geodätischen Instituts und des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung in Potsdam ord. Professor für Geodäsie an der Universität Berlin Geh. Oberregierungsrat Dr. Robert Helmert, der ord. Professor der Physik an der Universität Christiania Dr. Christian Birkeland, der emer. ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und frühere Direktor der dortigen Universitäts-Sternwarte Hofrat Professor Dr. Edmund Weiss, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Pringsheim, der Privatdozent der Chemie an der Handelshochschule Cöln Dr.-Ing. Ernst Schütz, der Privatdozent für reine Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Wilhelm Behrens (im Felde als Leutnant gefallen).

Angebote.

Für unser wissenschaftliches Laboratorium suchen wir

mehrere Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung. Bevorzugt werden Herren, welche Erfahrungen auf dem Röhrengebiet (Gasionisation, Elektronenemission) besitzen.

Stellungsgesuche mit Gehaltsforderung, Militärverhältnissen, frühestem Eintrittstermin und Lichtbild erbeten unter **S. H. 498** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Gesuche.

Promovierter Physiker,

seit 2 Jahren in ungekündigter Stellung an großindustriellem Werk erfolgreich tätig, sucht in Kriegsindustrie aussichtsreiche Stellung. Zuschriften erbeten unter **S. H. 497** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel), Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

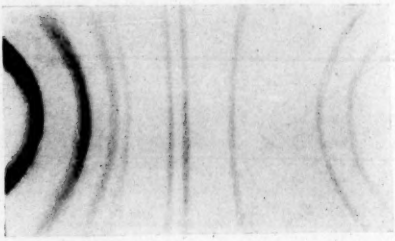


Fig. 1.

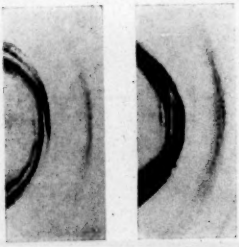


Fig. 2.

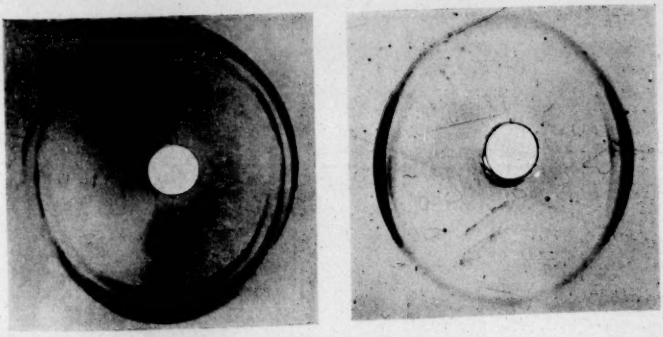


Fig. 3.

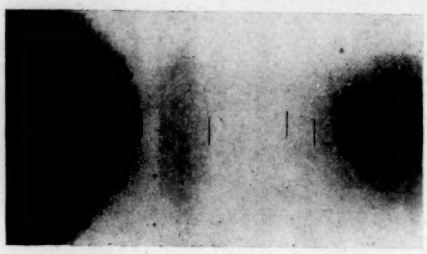


Fig. 4.

Fig. 5.

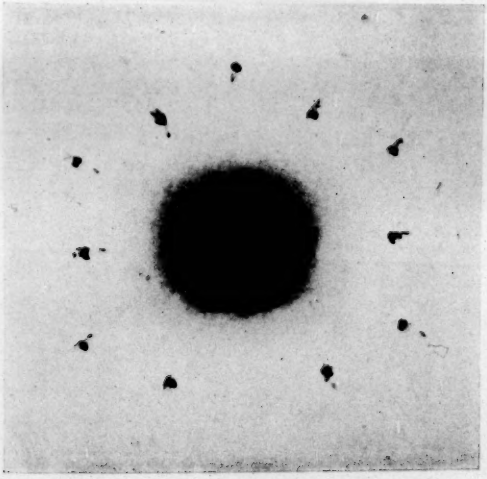


Fig. 6.